教養講座

多様化時代の数理計画法　第4回　可能性計画法

乾口　雅弘

1.　はじめに

制約条件式や目的関数の係数が明確にわからない状況での数理計画法として，前回は，確率計画法を取り上げた．そこでは，不明確な係数が従う確率分布を定めなければならない．十分に多くのデータがある場合には，客観的な確率分布の推定が可能であるが，データが少ない場合には，容易ではない．確率分布を過去のデータから客観的に推定できたとしても，本当に係数がその確率分布に従うかどうかは疑問である．これに対し，専門家の主観的な経験的知識や勘を積極的に取り入れ，不明確な係数の取りうる範囲をファジィ集合として定めた可能性計画法 (possibilistic programming) が提案されている[1],[2]．

本稿では，可能性計画法を取り上げ，その基礎と考え方，主な定式化法，および通常の数理計画法による取り扱いとの相違について，例題を用いて解説する．なお，可能性計画法はファジィ数理計画法 (fuzzy mathematical programming) の一種である．ファジィ数理計画法は，

1. 意思決定者の希求水準の漠然性を扱うもの．
2. 係数の不明確さを扱うもの．
3. 漠然とした希求水準と不明確な係数とを同時に扱うもの

の三つに分類できる[1],[2]．1 のタイプのファジィ数理計画法が本連載の第2回で取り扱われたフレキシブル計画法である．可能性計画法は，2, 3 のタイプのファジィ数理計画法のことをいう．本稿では，紙面の都合上，2 のタイプのものについて述べる．

いぬいぐち　まさひろ　広島大学工学部
〒739 東広島市鏡山 1-4-1

2.　例題と線形計画アプローチ

2.1　例題

[例題]　ある工場では，新たに製品Aを生産しようと考えている．製品Aの生産工程は，少し前に生産を始めた製品Bの生産工程と同じく，工程1，2，3の3工程である．製品Aの1単位当たりの工程1，2，3での所要時間は，それぞれ,「だいたい 2 単位時間」,「だいたい 4 単位時間」,「だいたい 1 単位時間」と予想される．製品Bの1単位当たりの工程1，2，3での所要時間は，それぞれ,「だいたい 3 単位時間」,「だいたい 2 単位時間」,「だいたい 3 単位時間」である．各工程の1カ月の実働可能時間は，工程1が 240 単位時間，工程2が 400 単位時間，工程3が 210 単位時間である．製品A，Bの1単位当たりの粗利益は，それぞれ,「だいたい5万円」,「だいたい7万円」である．このとき，粗利益を最大にするためには，製品A，Bそれぞれ何単位ずつ生産すればよいだろうか？

2.2　通常の線形計画法の適用

可能性計画法による解と比較するため，通常の線形計画問題として定式化し，解を求めておこう．

製品Aの生産量を x_1，製品Bの生産量を x_2 とし,「だいたい…」という形の不明確さを無視すると，例題は，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 5x_1 + 7x_2 \\
\text{制約条件} & 2x_1 + 3x_2 \leq 240 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \leq 400 \\
 & x_1 + 3x_2 \leq 210 \\
 & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0
\end{array}
\tag{1}
$$

と表せる．これを解けば，最適解は $(x_1, x_2) = (90, 20)$ となる．この解では，1番目と2番目の制約条件が等号で成立している．これらの制約条件の係数 2, 3, 4, 2 の見積もりが誤っていて，真の値が少しでも大きければ，実行不能になり，実行可能性の面で危険な解になる．そこで，係数の不明確さを考慮して，各制約条

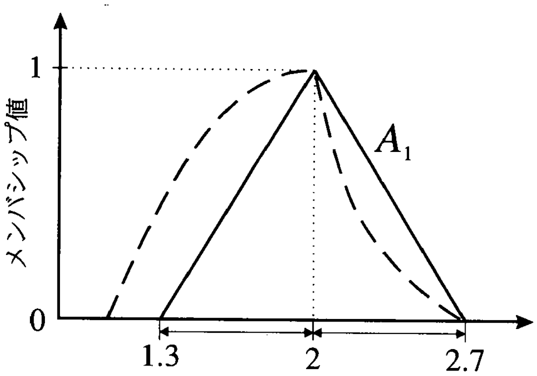

図1．三角型ファジィ数 $\langle 2, 0.7\rangle$

件に余裕があるように，制約条件の右辺の値を小さく設定しよう．たとえば，17% の余裕を取り，右辺の値を 83% にして，問題を定式化すると，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + 3x_2 \leq 199.2 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 332 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 174.3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

となる．これを解けば，最適解 $(x_1, x_2) = (74.7, 16.6)$ が得られる．x_1 と x_2 の比をとれば，$x_1 : x_2 = 9 : 2$ となり，(1) 式の最適解における比と一致している．このタイプの問題では，制約条件の右辺の値を一様の割合で変化させても，最適解における変数の値の比は一定で変化しない．いずれの場合も，製品Aを製品Bの 4.5 倍生産することになる．

3.　可能性計画法の基礎

3.1　可能性計画問題の定式化

例題の「だいたい···」という形の不明確なパラメータをファジィ数で表現し，可能性計画法を適用しよう．そのため，この工場の製造管理部の担当者を呼び出し，「だいたい 2 単位時間」などの製造時間をファジィ数で表現する．たとえば，「だいたい 2 単位時間」と表現された製品Aの工程 1 での所要時間 a_1 のファジィ数 A_1 は，図 1 の実線のように，

$$\mu_{A_1}(r) = \max\left(0, 1 - \frac{10|r-2|}{7}\right) \tag{3}$$

なるメンバシップ関数により表そう．図 1 は，2 単位時間が最もありうることを表し，長くかかっても 2.7 単位時間を越えることがなく，短くとも 1.3 単位時間未満ではないことを表している．また，2 単位時間を上回る可能性と下回る可能性は，ともに等しく線形的に減少し，2 単位時間を中心に左右対称な 2 等辺三角形になっている．もし，2 単位時間を下回る可能性が上回る可能性より高い場合には，図 1 の破線のような非対称なファジィ数となる．本稿では，簡単のため，2 等辺三角型（以後，簡単に三角型という）のファジィ数だけを取り扱うが，非対称な場合も全く同様に扱うことができる．図 1 のような三角型ファジィ数は，中心 a_1^c と幅 w_{a_1} の対 $\langle a_1^c, w_{a_1}\rangle$ と表現できる．たとえば，図 1 のファジィ数は $A_1 = \langle 2, 0.7\rangle$ と表せる．ファジィ数 A_1 は，製品Aの工程 1 での所要時間 a_1 の取りうる範囲を可能性の度合いを付けて表しており，可能性分布 (possibility distribution) と呼ばれる．このとき，製品Aの工程 1 での所要時間 a_1 は可能性変数 (possibilistic variable) と呼ばれる．

製品Aの他の工程での所要時間 a_i，製品Bの各工程での所要時間 b_i も三角型ファジィ数 $A_i = \langle a_i^c, w_{a_i}\rangle$，$B_i = \langle b_i^c, w_{b_i}\rangle$ で定める．同様に，経理部の担当者を呼び出し，各製品の単位当たりの粗利益 c_j を三角型ファジィ数 $C_j = \langle c_j^c, w_{c_j}\rangle$ で表す．この結果，表 1 のようなファジィ数が得られた．表 1 の三角型ファジィ数の幅に注目すると，新たに生産を開始しようと考えている製品Aの方が製品Bよりも大きくなっている．

可能性計画問題は，次のように定式化される．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & c_1x_1 + c_2x_2 \\ \text{制約条件} & a_1x_1 + b_1x_2 \leq 240 \\ & a_2x_1 + b_2x_2 \leq 400 \\ & a_3x_1 + b_3x_2 \leq 210 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array} \tag{4}$$

ただし，c_j, $j = 1, 2$ は可能性変数で，その取りうる範囲はファジィ数 C_j に制限される．a_i および b_i, $i = 1, 2, 3$ は，それぞれ，取りうる範囲がファジィ数 A_i および B_i に制限された可能性変数である．

表1．例題1のファジィ係数

製品	A	B	実働可能時間
工程 1	$A_1 = \langle 2, 0.7\rangle$	$B_1 = \langle 3, 0.5\rangle$	240
工程 2	$A_2 = \langle 4, 1.5\rangle$	$B_2 = \langle 2, 0.3\rangle$	400
工程 3	$A_3 = \langle 1, 0.5\rangle$	$B_3 = \langle 3, 0.3\rangle$	210
粗利益	$C_1 = \langle 5, 1\rangle$	$C_2 = \langle 7, 0.7\rangle$	

3.2 可能性線形関数の計算

(4) 式の問題を見ると，目的関数や制約条件の左辺が可能性変数を係数とする x_1，x_2 の線形関数となっている．このような関数を可能性線形関数 (possibilistic linear function) という．可能性変数が不明確なパラメータを表しているので，可能性線形関数の値も不明確となり，その取りうる範囲は，やはりファジィ数に制限される．可能性線形関数の値を制限するファジィ数は，拡張原理 (extension principle) に基づき計算される．たとえば，x_1, x_2 が与えられたとき，(4) 式の目的関数値 $f_0(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2$ は，次のメンバシップ関数をもつファジィ数 $F_0(x_1,x_2)$ に制限される．

$$\mu_{F_0(x_1,x_2)}(r) = \sup_{\substack{p,q \\ r=px_1+qx_2}} \min(\mu_{C_1}(p), \mu_{C_2}(q)) \tag{5}$$

c_1，c_2 を制限するファジィ数 C_1，C_2 は，それぞれ，三角型ファジィ数 $\langle 5,1\rangle$，$\langle 7,0.7\rangle$ であったことに注意して，(5) 式の拡張原理に基づきファジィ数 $F_0(x_1,x_2)$ を計算すると，次の三角型ファジィ数になる．

$$F_0(x_1,x_2) = \langle 5x_1+7x_2,\ |x_1|+0.7|x_2|\rangle$$

一般に，可能性変数 y_j が三角型ファジィ数 $Y_j=\langle y_j^c, w_j\rangle$ で制限されるとき，$z=\sum_{j=1}^{n}k_jy_j$ （k_j は実数値）を制限するファジィ数（可能性分布）Z は，

$$Z = \left\langle \sum_{j=1}^{n} k_j y_j^c, \sum_{j=1}^{n} |k_j| w_j \right\rangle \tag{6}$$

なる三角型ファジィ数になることが知られている[3]．

(4) 式の各制約条件の左辺の値を $f_i(x_1,x_2)=a_ix_1+b_ix_2$, $i=1,2,3$ とし，$f_i(x_1,x_2)$ を制限するファジィ数を $F_i(x_1,x_2)$ としよう．a_i, b_i を制限するファジィ数 A_i, B_i が表1に示すように三角型ファジィ数であったから，$F_i(x_1,x_2)$ は，それぞれ，次の三角型ファジィ数になる．

$$F_1(x_1,x_2) = \langle 2x_1+3x_2,\ 0.7|x_1|+0.5|x_2|\rangle$$

$$F_2(x_1,x_2) = \langle 4x_1+2x_2,\ 1.5|x_1|+0.3|x_2|\rangle$$

$$F_3(x_1,x_2) = \langle x_1+3x_2,\ 0.5|x_1|+0.3|x_2|\rangle$$

3.3 可能性測度と必然性測度に基づく指標

可能性線形関数の値は不明確なパラメータを伴っているので，一意に定まらない．したがって，可能性線形関数の最大化は何を意味するのか，可能性線形関数の値が 240 以下とは，どういう条件を表すのかが明確ではない．しかし，可能性線形関数の値がある制約や目標を満たす可能性あるいは確実性の度合いは，可能性測度 (possibility measure) と必然性測度 (necessity measure) を用いて定義できる[3]．

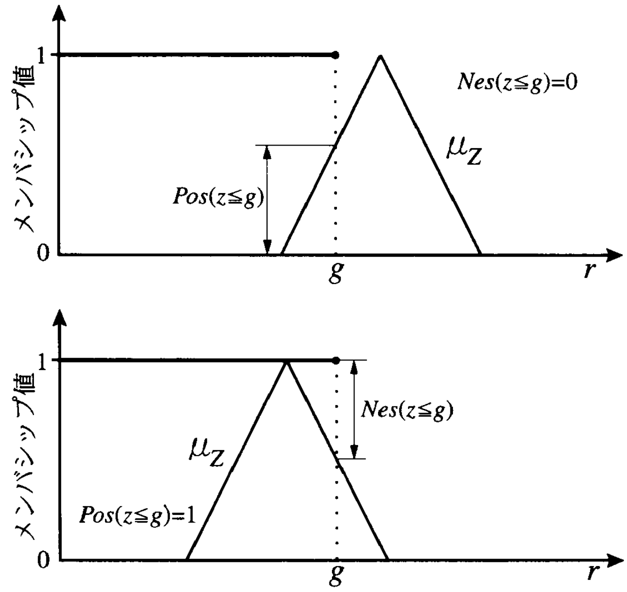

図２．$z \le g$ の可能性と確実性の指標

可能性変数 z とその取りうる範囲を制限するファジィ数 Z が与えられたとき，z が g 以下である可能性と確実性の度合いは，それぞれ，次式で定義される．

$$Pos(z \le g) = \sup\{\mu_Z(r) \mid r \le g\} \tag{7}$$

$$Nes(z \le g) = 1 - \sup\{\mu_Z(r) \mid r > g\} \tag{8}$$

$Pos(z \le g)$ と $Nes(z \le g)$ の示す値を図２に示す．同様に，z が g 以上である可能性と確実性の度合いは，それぞれ，$Pos(z \ge g) = \sup\{\mu_Z(r) \mid r \ge g\}$ と $Nes(z \ge g) = 1-\sup\{\mu_Z(r) \mid r < g\}$ と定義できる．

可能性線形関数の値 $f_i(x_1,x_2)$ もファジィ数 $F_i(x_1,x_2)$ に制限される可能性変数であるので，(7), (8) 式の z に $f_i(x_1,x_2)$ を，Z に $F_i(x_1,x_2)$ を代入することができる．これにより，可能性線形関数の値が与えられた値以下（以上）である可能性と確実性の度合いが求められる．

4. 問題の解釈と可能性計画法

先に述べたように，可能性線形関数値が最大であることや可能性線形関数の値が与えられた値以下であることは，どういう条件かを明確に定めていない．したがって，(4) 式は明確に記述されていない問題になっ

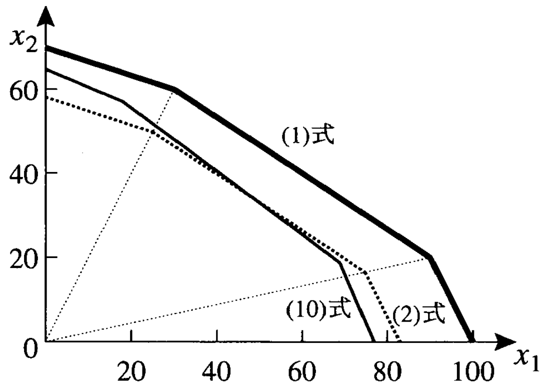

図3．(1) 式，(2) 式と (10) 式の実行可能領域

ている．可能性計画法では，可能性線形関数の最大化や可能性線形関数を含む制約条件に解釈を与え，(4) 式を明確に記述された通常の数理計画問題へ変換する．一般に無数の解釈が存在するので，問題の背景や意思決定者の意向に応じた解釈が採用される．ここでは，よく知られている二つのモデルを紹介し，どのように意思決定者の意向が解に反映されるかを示す．

4.1 満足水準最適化モデル

実働稼働時間は，臨時作業員の雇用によっても作業面積などの制約から容易に増やせないとしよう．このとき，(4) 式の制約条件は，高い確実性で満たされなければならない．確実性の度合いが 0.8 以上あれば，確実性が高いとみなせるなら，(4) 式の制約条件は，

$$\begin{aligned} &Nes(a_1x_1+b_1x_2\le 240)\ge 0.8\\ &Nes(a_2x_1+b_2x_2\le 400)\ge 0.8\\ &Nes(a_3x_1+b_3x_2\le 210)\ge 0.8\\ &x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{aligned} \tag{9}$$

と取り扱うことができる．(9) 式は次式と等価になる．

$$\begin{aligned} &2.56x_1+3.4x_2\le 240\\ &5.2x_1+2.24x_2\le 400\\ &1.4x_1+3.24x_2\le 210\\ &x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{aligned} \tag{10}$$

(10) 式の実行可能領域を (1) 式，(2) 式のものと比較すると，図3のようになる．実行可能領域の面積がほぼ等しい (2) 式に比べ，(10) 式では，x_1 を厳しく制限し，x_2 を緩く制限していることがわかる．すなわち，実働可能時間の制約を満たす確実性を高めるため，より不明確な製品Aの生産量に強い制限を課している．

一方，目的関数の粗利益について意思決定者は，高い確実性で見込める額に強い感心をもっていたとしよう．その額が大きいほど，好ましいと考えられるので，高い確実性で見込める額，すなわち，

$$Nes(c_1x_1+c_2x_2\ge u)\ge 0.8 \tag{11}$$

となる u をできるだけ最大化する問題と解釈できる（図4参照）．図4より理解できるように，(11) 式は点 P が高さ 0.2 の直線 l の下にあること，言い換えれば，点 Q の横軸の値 t が u 以上にあることと等価である．$t=(c_1^c-0.8w_{c_1})x_1+(c_2^c-0.8w_{c_2})x_2$ であるから，表1の数値を代入すると，(11) 式は

$$4.2x_1+6.44x_2\ge u \tag{12}$$

となる（先の (9) 式から (10) 式への変形も同様である）．(10)，(12) 式のもとで u を最大化することは，(10) 式のもとで (12) 式の左辺を最大化することと等

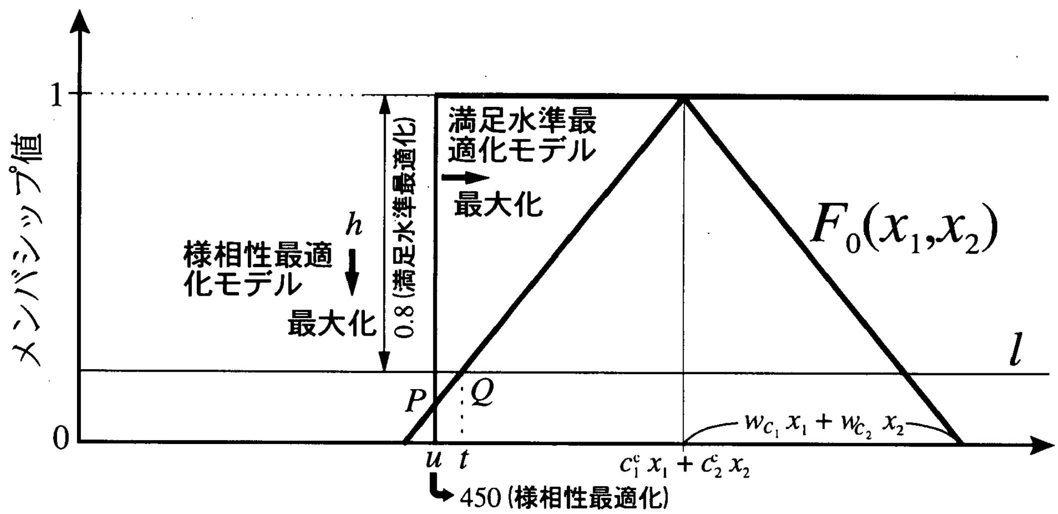

図4．満足水準最適化モデルと様相性最適化モデル

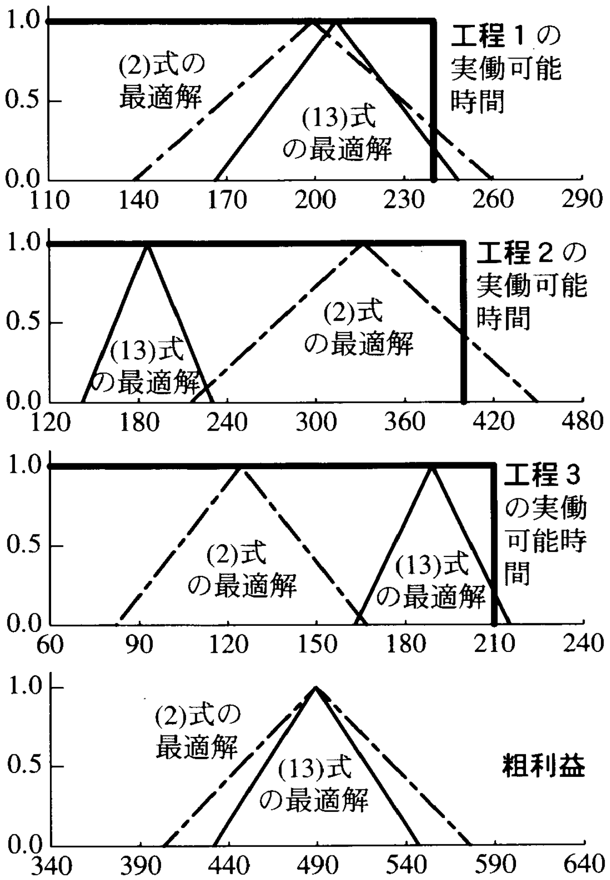

図５．(2) 式の解と (13) 式の解との比較

価である．結局 (4) 式は，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & 4.2x_1 + 6.44x_2 \\ \text{制約条件} & (10)\ \text{式} \end{array} \qquad (13)$$

なる線形計画問題に帰着される．これを解くと $(x_1, x_2) \approx (17.99, 57.04)$ なる解が得られる．比較のため，(2) 式の解と (13) 式の解を図示すると，それぞれ，図５のようになる．図５よりわかるように，(2) 式の解では，工程１，２での実働可能時間の制約を満たす確実性があまり高くなく，ここで仮定している状況に合っていない．

4.2　様相性最適化モデル

満足水準最適化モデルの場合とは異なり，意思決定者が 450 万円以上の粗利益をできるだけ確実に得たいと希望しているとしよう．この希望を表現すると，

$$\text{最大化}\ Nes(c_1x_1 + c_2x_2 \geq 450) \qquad (14)$$

となる．図４に示すように，この目的関数は，満足水準最適化モデルとは全く逆になっていることがわかる．すなわち，満足水準最適化モデルで最大化していた u を 450 に固定し，0.8 に固定していた h を最大化する問題となる．(14) 式に (10) 式の制約条件を加えて，問題を変形すると，

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & h \\ \text{制約条件} & (5-h)x_1 + (7-0.7h)x_2 \geq 450 \\ & (10)\ \text{式} \end{array} \qquad (15)$$

となる．この問題は，h に関する二分法とシンプレックス法を用いて解くことができる[1],[2]．(15) 式の最適解では，$(x_1, x_2) \approx (17.99, 57.04)$ となり，満足水準最適化モデルの最適解と一致する（これらのモデルの最適解は常に一致するとは限らない）．

また，意思決定者が，粗利益が 530 万円以上得られる可能性も 450 万円以上得られる確実性と同じくできるだけ高くなって欲しいと希望したとすると，目的関数を

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \min(Nes(c_1x_1 + c_2x_2 \geq 450), \\ & \quad Pos(c_1x_1 + c_2x_2 \geq 530)) \end{array} \qquad (16)$$

とすれば良い．(16) 式は，次の問題に帰着され，二分法とシンプレックス法で解くことができる．

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & h \\ \text{制約条件} & (5-h)x_1 + (7-0.7h)x_2 \geq 450 \\ & (6-h)x_1 + (7.7-0.7h)x_2 \geq 530 \\ & (10)\ \text{式} \end{array} \qquad (17)$$

この問題の最適解では，$(x_1, x_2) \approx (64.68, 21.89)$ となる．この解と (15) 式の解の様子を図６に示す．(15) 式の解に比べ，530 万円以上の粗利益の可能性が考慮され，少し改善されている．しかし，530 万円以上の可能性と 450 万円以上の確実性とをバランス良く最大化しているため，450 万円以上の確実性がかなり低下している．

さらに，意思決定者が，粗利益が 450 万円以上得られる確実性がほどほどにあるもとで，530 万円以上得られる可能性ができるだけ高くなることを希望すれば，たとえば，$Nes(c_1x_1 + c_2x_2 \geq 450) \geq 0.5$ のもとで，$Pos(c_1x_1 + c_2x_2 \geq 530)$ を最大化すれば良い．ここでは，「確実性がほどほどにある」を確実性が 0.5 以上と解釈している．この問題の最適解は，$(x_1, x_2) \approx (38.28, 41.76)$ となる．この解は，(15) 式と (17) 式の解の中間的なものになっている．上述のように，可能性計画法では，意思決定者の意向に応じてさまざまな解が求められる．

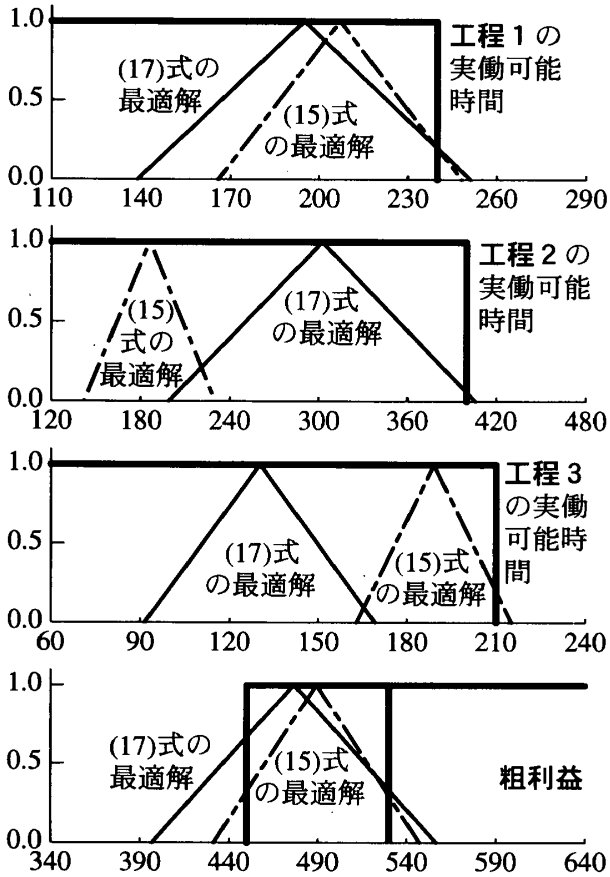

図６．(17) 式の解と (15) 式の解との比較

5. おわりに

本稿では，可能性計画法の基礎と二つのモデルについて述べた．不明確なパラメータを十分に考慮せずに，通常の数理計画問題へ直接定式化するよりも，可能性計画問題を介し，問題の解釈に応じた定式化を行った方が，意思決定者の意向を反映した解が得られることを示した．三角型ファジィ数のみを用いたが，どのような形状のファジィ数を用いても全く同様な結果が得られる．また，ここで述べた二つのモデル以外にも，対称モデル（制約化モデル），あいまいさ最適化モデルなど，さまざまなモデルが提案されている[4]．さらに，本連載の第２回で述べられたファジィ目標を導入することや，不明確な係数をもつ多目的計画問題を取り扱うこともできる．適切なモデル，適切な解釈を導入することにより，意思決定者の微妙な意向を適切に解に反映することができる．

最後に，ここで述べた可能性計画法は，確率計画法の機会制約条件問題に対応するものである．前回に述べられたように，確率計画法には，機会制約条件問題以外に２段階問題もある．可能性計画法では，未だ２段階問題に対応するものは考えられていない．いずれ提案されるものと期待される．

次回は，確率計画法と可能性計画法とを比較し，それぞれの特徴を考察する．

参考文献

[1] 浅居喜代治，田中英夫編：「ファジィＯＲ」，日刊工業新聞社 (1993).

[2] Słowinski, R. and Teghem, J. (Eds.): *Stochastic versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers (1990).

[3] Dubois, D. and Prade, H.: "Fuzzy Numbers: An Overview", *Analysis of Fuzzy Information, Vol. I: Mathematics and Logic* (Bezdek, J.C., Ed.), CRC Press (1987) 3-39.

[4] Inuiguchi, M., Ichihashi, H. and Kume, Y.: "Modality Constrained Programming Problems: A Unified Approach to Fuzzy Mathematical Programming Problems in the Setting of Possibility Theory", *Information Sciences*, **67** (1993) 93-126.