教養講座

多様化時代の数理計画法　第3回　確率計画法

石井　博昭

1．はじめに

まず簡単な例として生産計画の問題を考えよう．S社はある工場の2つの複合ラインI，IIで2種類の製品1，2を生産している．各ラインI，IIを単位時間稼働するときの費用はc_1，c_2であり，この単位時間稼働のとき，ラインIでは製品1がa_{11}，製品2がa_{21}だけでき，ラインIIでは製品1はa_{12}，製品2はa_{22}だけできる．各ラインI，IIの1ケ月の稼働時間をx_1，x_2とすると各製品1，2は各々$a_{11}x_1+a_{12}x_2$，$a_{21}x_1+a_{22}x_2$だけできる．また，1ケ月全体の稼働費用は$c_1x_1+c_2x_2$となる．各製品1，2の需要は確率変動するとして各々ξ_1, ξ_2で表す．通常はこの実現値がわかる前に生産しておかねばならないので，生産量と需要量とは一致しない．ここで，厳密さにかけるがξ_1，ξ_1を確率変数とその実現値の両方に用いる．

$\xi_i>\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j$のときは製品$i$は品不足であり，緊急に製造したり他に頼んだりして不足量$y_i^+=\xi_i-\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j$を都合しなければならない．一方で，売れ残った場合，すなわち，$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j\geq\xi_i$のときはバーゲンなどの方法で対処して，$y_i^-=\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j-\xi_i$だけ処分しなければならない．品不足の場合の単位当たりかかる費用をp_i，売れ残りの場合のこの費用をq_iとすると，生産費用，品切れ，売れ残りの期待費用のバランスを考えて，生産担当者は例えば次のような問題P_0により，工場の各ラインの1ケ月の稼働時間を決めなければならない．

$$P_0：最小化\sum_{j=1}^{2} c_jx_j+E\left[\sum_{i=1}^{2}(p_iy_i^++q_iy_i^-)\right]$$

$$制約条件\ x_j\geq 0,\ j=1,2,.$$

ここで，Eは期待値をとる汎関数である．

このように確率変動する要素を組み込んで最適化を行うのが確率計画法である．古くからこのような最適化は，在庫管理，ポートフォリオ，システムの設計・保全等で考えられてきた．しかし，数理計画の1つの流れとして定着してきたのは，1950年代の後半からで，不確実性に対する態度や考え方による違いに基づいて，いろいろなモデルが提唱されてきた．この辺りをまず2節で述べる．3節では，情報および推定予測との関係から確率計画法をみる．4節では，確率的組合せ最適化の幾つかのモデルについて紹介するとともに，現状の問題点や将来の展望について議論する．

いしい　ひろあき　大阪大学
〒565 吹田市山田丘2－1

2．確率計画モデル

勘と技術がすべてと思われていた野球にもデータを集めることが重要視されるこの頃である．すなわち，数理統計ではできるだけ情報（特に，確率変動する要素に対しては実現値の情報）を基に意思決定する．しかし，上記の生産計画の例からもわかるように，現実には実現値を知る前に意思決定しなければならない場合が多い．また，そのときにこそ意思決定が重要である．A. M. Madansky [8] は実現値を知った後に意思決定をすることを「待って，よく見，よく聞いて」意思決定するという意味で，wait and see アプローチと呼び，そうではなく，実現値を知る前に意思決定をしなければならない場合を今直ちにという意味で here and now アプローチと呼んだ．前者では意思決定の時点で実現値がわかっているので，実現値によって最適値や最適解がどう変わるかという分布問題を中心に研究が行われてきた．後者では情報がないので，何を基準にして意思決定をするかとか，確率変数の実現値との関係で解が実行可能でなくなった場合はどうするかなどが問題となるので，いろいろなモデルが考えられている．従って以下では後者の場合についてのみ考えていく．すなわちこの場合は意思決定の方が先であるので実際の確率変動要素の実現値との差異によって成

　　

り立たない条件をどうするかが問題である．差異に対して何らかの行動を起こして埋める（この行動をリコースという）か，そう頻繁でなければ，何回かは我慢するという2つの態度がある．前者はリコース（recourse）を考えるということでリコース問題（stochastic programming with recourse）と言い，最初A. M. Madanskyにより2段階問題として（[18]），さらには一般形としてD. W. Walkup and R. J. B. Wets（[10]）により提唱された．後者は機会制約条件（chance constraint）を考えた機会制約条件問題（chance constrained programming）としてA. Charnes and W. W. Cooper（[13]）により提唱された．

2段階問題では確率変動要素の実現値がわかる前の1段階目でまず意思決定を行い，その後わかる実現値とこの意思決定との適合性の“差異”により制約条件の不成立が生じた場合の差異を埋めるための行動からなる．すなわち1段階目で意思決定をする費用と2段階目でリコースを行う期待費用の和を最小にする最適意思決定を求めるのが2段階問題である．上記の生産計画問題P_0はまさしく2段階問題であり，1段階目での意思決定が各ラインでの稼働時間である．実際の需要が確率変動要素の実現値で，緊急生産やバーゲンがリコースである．この2段階問題は一般的に示せば以下のような形となる．

P_1：最小化 $z=cx+E\{Q(x,\ \xi)\}$

制約条件 $b_i-A_ix\leq 0,\ i=1,\ 2,\cdots,\ m$

$x\geq 0$

ここで，c，x，A_iは各々横nベクトル，縦nベクトル，横nベクトルでb_iは定数である．確率変動要素はξであるが，場合により確率変数あるいはその実現値に用いる．このとき，リコースの費用関数はq，y，W，$h(\xi)$，$T(\xi)$を適当なベクトル，行列として$Q(x,\xi)=\inf_{y\geq 0}\{qy|Wy=h(\xi)-T(\xi)x\}$とかける．この問題は$q$，$W$が確率変動に関係しないので，固定リコース問題という．この問題では（固定された）制約条件$b_i-A_ix\leq 0,\ i=1,\ 2,\cdots,m$の他に，確率変動要素$\xi$を含む等式制約$T(\xi)x=h(\xi)$がある．$\xi$の実現値を知る前に意思決定，すなわち，$x$を決めないといけないので，その等式が成り立たないことがある．このとき，その差$h(\xi)-T(\xi)x$を埋めるべくとる行動がリコースyであり，その効果がWy，費用がqyという意味である．従って，意思決定xにはその直接の費用（生産計画では稼働費用）とそれから発生する可能性のあるリコースによる費用（生産計画では需要との差異を埋めるための費用）がかかる．もちろん，この他いろいろなタイプがあるが省略する．そのかわりに，この辺りの状況を上記の生産計画問題に以下の架空の数値を当てはめて説明する．

例1．単位時間稼働コスト$c_1=10$，$c_2=20$とし，a_{ij}は表1で与えられる数値とする．

表1 a_{ij}（単位時間当たりの製造数）

	工場I	工場II
製品1	2	5
製品2	5	4

また，不足の時の費用は$p_1=40$，$p_2=20$，売れ残りの時の費用は$q_1=10$，$q_2=5$，各需要ξ_1，ξ_2は次の図1，図2で与えられるような一様分布とする．

x_1，x_2は非負条件だけであるので，以下の図3のように実行可能領域を4つの領域に分けて考える．ここで，Iは直線$2x_1+5x_2=30$を示し，IIは直線$5x_1+4x_2=40$を示す．

点（x_1，x_2）が領域aに属する場合

この場合いつも需要より製造量が多いので売れ残りの可能性のみあり，$z=cx+E\{Q(x,\xi)\}$は以下のよ

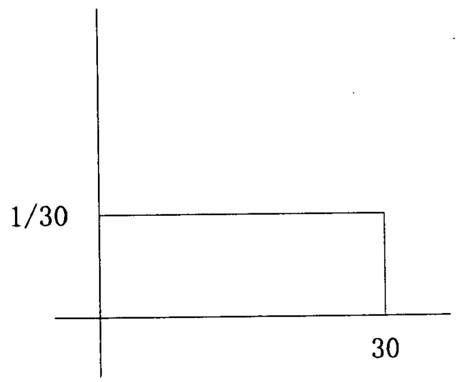

図1　製品1の需要分布

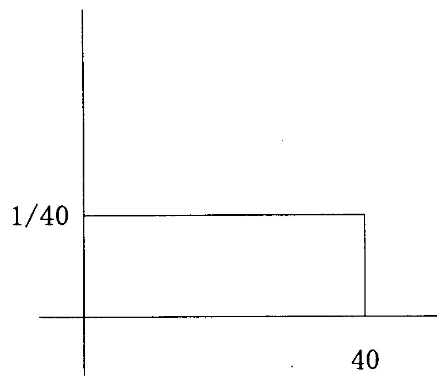

図2　製品2の需要分布

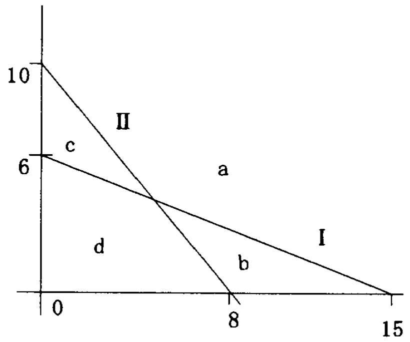

図3　$(x_1,\ x_2)$の領域分け

うに計算される．

$$10\,x_1+20\,x_2+10\int_0^{30}(2\,x_1+5\,x_2-\xi_1)f_1(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+5\int_0^{40}(5\,x_1+4\,x_2-\xi_2)\ f_2(\xi_2)\,d\xi_2$$
$$=55\,x_1+90\,x_2-250$$

これの最小はIとIIの交点でおこり，その座標は $x_1=\dfrac{80}{17}$，$x_2=\dfrac{70}{17}$である．

点 (x_1, x_2) が領域 b に属する場合

この場合は，製品1については品切れと売れ残りが各々$2\,x_1+5\,x_2\leq\xi_1\leq 30$，$0\leq\xi_1\leq 2\,x_1+5\,x_2$を満たす場合に起こるので，目的関数値は次のように計算される．

$$10\,x_1+20\,x_2+10\int_0^{2x_1+5x_2}(2\,x_1+5\,x_2-\xi_1)f_1(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+40\int_{2x_1+5x_2}^{30}(\xi_1-2\,x_1-5\,x_2)f_1(\xi_1)\,d\xi_1$$
$$+5\int_0^{40}(5\,x_1+4\,x_2-\xi_2)f_2(\xi_2)\,d\xi_2$$
$$=35\,x_1+40\,x_2+\frac{1}{6}(2\,x_1+5\,x_2)^2$$
$$+\frac{2}{3}(30-2\,x_1-5\,x_2)^2-100$$

この場合の最小はIIの上でおこり，最小を与えるのは $x_1=\dfrac{1884}{289}$，$x_2=\dfrac{535}{289}$である．

点 $(x_1,\ x_2)$ が領域 c に属する場合

製品2は品切れと売れ残りが各々$5\,x_1+4\,x_2\leq\xi_2\leq 40$，$0\leq\xi_2\leq 5\,x_1+4\,x_2$を満たす場合に起こることから b と同様にして，目的関数値は$\dfrac{5}{16}(5x_1+4x_2)^2-70\,x_1-10\,x_2+250$となる．また最小はI上の$x_1=\dfrac{600}{289}$，$x_2=\dfrac{1494}{289}$でおこる．

点 $(x_1,\ x_2)$ が領域 d に属する場合

製品1，2とも品切れと売れ残りの可能性があり，目的関数値は$10\,x_1+20\,x_2+\dfrac{1}{6}(2\,x_1+5\,x_2)^2+\dfrac{2}{3}(30-2\,x_1-5\,x_2)^2+\dfrac{1}{16}(5\,x_1+4\,x_2)^2+\dfrac{1}{4}(40-5\,x_1-4\,x_2)^2$となり，最小は$x_1=\dfrac{1152}{289}$，$x_2=\dfrac{504}{289}$でおこる．

a，b，c どの場合も最小は d との境界上であるので全体の最小は$x_1=\dfrac{1152}{289}$, $x_2=\dfrac{804}{289}$でおこり，これが最適解となる．■

一方，機会制約条件は確率変動要素をその条件に含んでいるために，その実現値によっては成り立たない場合もあるので，この条件がある確率以上で満たされればよいとするものである．通常の制約条件はそれに対して常に成り立つことを要求する．例えば遅刻もいつもでなければ，許されるが，頻繁であれば認められない．このような機会制約条件を含む問題が機会制約条件問題であり，例えば，次のような形のものが考えられる．

P_2：最小化 cx

制約条件 $Pr\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\geq\xi_i\}\geq\alpha_i$，$i=1,2,\cdots m$，

$x\geq 0$．

ここで，Pr は{　}の中が成り立つ確率を示し，各 ξ_iは確率変数で，各 α_iは $1\geq\alpha_i\geq 0$ で成り立つべき確率レベルを示す．この条件が機会制約条件である．上記のP_2で c も確率変数のときは，cx の期待値を最小にするモデル（Eモデル）や分散を最小にするモデル（Vモデル），あるいは$Pr\{cx\geq z_0\}$と表される目的関数を最大にする確率最大化モデルなどいろいろ考えられている．リコースでは差異の大きさが問題であり，条件が成り立たない確率とかは問題にしない．すなわち，いつもちょっとだけ遅れてくるのとめったにないがめちゃくちゃ遅れるのとどっちが許されるかの問題である．

一方，機会制約条件は差異の大きさより成り立たない確率が問題となる．ところが，機会制約条件は次のようにしてリコース費用関数の形に書くこともできる．機会制約条件を一番単純な$Pr\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geq\xi_i\}\geq\alpha$，すなわち，確率分布関数を用いて$F(\sum_{j=1}^{n}a_jx_j)\geq\alpha$とすると

$$Q(x,\xi)=\begin{cases}\alpha-1 & (\sum_{j=1}^{n}a_jx_j-\xi\geq 0)\\ \alpha & (\text{otherwise})\end{cases}$$

とおけばよい．実際，このとき

$$E[Q(x,\xi)]=\int_{-\infty}^{\sum_{j=1}^{n} a_jx_j}(\alpha-1)dF(\xi)+\int_{\sum_{j=1}^{n} a_jx_j}^{\infty}\alpha dF(\xi)$$
$$=\alpha-F(\sum_{j=1}^{n} a_jx_j)$$

となり，$F(\sum_{j=1}^{n} a_jx_j)\geq\alpha$を満たす$x$が存在する条件と$E[Q(x,\xi)]$の最小値が0以下となる条件は同値となる．

2段階問題も機会制約条件問題も通常解くためには等価な確定問題，すなわち，非線形計画問題に変換して解くことになるが，この等価確定問題への変換が難しい上，変換できたとしてもとても複雑な形となる．一般的に言って，2段階問題の方が変換が困難であり，形もより複雑である．どちらにしても最低限確率変動要素の分布関数が必要である．この辺りを機会制約条件$Pr\{\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\geq\xi_i\}\geq\alpha$を使って説明する．確率変数$\xi$が平均$\mu$，分散$\sigma^2$の正規分布$N(\mu,\sigma^2)$に従うとすると$\frac{\xi-\mu}{\sigma}$が標準正規分布に従うことからこの機会制約条件は簡単な計算で，等価確定条件$\sum_{j=1}^{n} a_jx_j\geq\mu+\sigma F^{-1}(\alpha)$に変形される．ここで，$F(x)$は標準正規分布の確率分布関数で，$F^{-1}(x)$はその逆関数である．

しかし，確率変動要素の分布関数が完全にわかることは一般には難しい．また，わかるとしても莫大な費用がかかることも多い．第3節でこの点を議論する．

3．情報と確率計画法

確率変動する対象の確率分布や実現値を確実に知ることができないような不完全情報下での確率計画問題に対して，実現値に関する情報を得ることの価値について考えてみよう．例えば，確率変動要素がある確率分布のクラスに従って変動していることがわかっているが，確率分布を規定する母数が既知でないとする．未知の母数が含まれている場合は，通常サンプルを集めて推定を行う．そこで，まず問題となるのは，費用をかけてサンプルを集めることの価値があるのかどうかである．もし，それだけの価値がなければ，サンプルを集める意味がない．その1つの基準が情報の価値である．ここでは，サンプル情報の期待価値(Expected Value of Sample Information，EVSIと略す）と完全情報の期待価値(Expected Value of Perfect Information, EVPIと略す)について考える．EVSIとは，事前分布あるいはその情報がない場合の最適意思決定の価値とサンプル情報からの事後分布を用いた場合の最適意思決定の価値の差の期待値である．EVPIは実現値がわかっている場合の最適意思決定の価値と実現値について全く情報がない場合の最適意思決定の価値の差の期待値である．EVPIは，まさしく，2章で述べたwait and seeとhere and nowのアプローチによる最適意思決定の差異に対応している．これらの概念は統計的決定理論において以前から考えられていたものであるが，数理計画問題では，J. Bracken and R. M. Soland ([2]）の論文で初めて使われた．彼らの基にしたモデルはcのみを確率変動要素とする次の線形計画問題P_3であった．

P_3：最小化cx

　　制約条件$Ax=b$, $x\geq 0$

ここで，A，bは各々$m\times n$行列，m次元縦ベクトル，xはn次元縦ベクトルで決定変数，0は成分が零のみからなるn次元縦ベクトルである．cはn次元横ベクトルで成分が確率変動すると仮定する．P_3の制約条件を満たすx全体の集合，すなわち，実行可能解の集合をSで示す．価値については最小化であるから，この場合EVSIおよびEVPIは以下のようになる．

$$\mathrm{EVSI}=\min_{x\in S}E'_c[cx]-E'_c[\min_{x\in S}E''_c(cx)]$$

$$\mathrm{EVPI}=\min_{x\in S}E'_c[cx]-E'_c[\min_{x\in S}cx]$$

ここで，E'_cは事前分布を用いた場合の期待値であり，E''_cはサンプルから得られる何らかの統計量から求められる事後分布を用いた場合の期待値を表す．上記のような目的関数にのみ確率変動要素が現れる場合でも，EVSIやEVPIを求めることは一般に非常に困難である．通常，確率計画モデルに対する情報の価値は，その上界や下界を追求するのがやっとである．このためには，以下の関係は有用である．

Jensenの不等式（[7]）

$\phi(x)$をxの凸関数とすると，Eを確率変数ξに関する期待値とし，E[ξ]の存在を仮定すると

E[$\phi(\xi)$]$\geq\phi$(E[ξ])が成り立つ．　■

このJensenの不等式を用いると2段階問題に関連する次の関係が示せる．

定理1　1段階目の目的関数がcx，2段階目のリコース費用関数が$Q(x,\xi)$，決定変数xのとり得る実行可能解の集合Sをもつ2段階問題を考える．このとき，次の不等式が成り立つ．

$$E[C(x(\bar{\xi}),\xi)]\geq\min_{x\in S}E[C(x,\xi)]\geq E[\min_{x\in S}C(x,\xi)]$$
$$\geq\min_{x\in S}C(x,\bar{\xi})$$

ここで，ξが確率変動要素，Eをこのξに関する期待値

とし，$C(x,\xi)=cx+Q(x,\xi)$とおき，$\bar{\xi}=E[\xi]$の存在を仮定した．また，$x(\bar{\xi})$は$C(x,\bar{\xi})$を最小にする$x\in S$を示す．■

$E[C(x,\xi)]=cx+E[Q(x,\xi)]$なることおよびminと$E$の順番に注意すれば，定理1のようなhere and nowたる2段階問題では，EVPIは，この最適値$\min_{x\in S}E[C(x,\xi)]$（定理1の不等式の第2辺）からwait and seeの場合の最適値の期待値$E[\min_{x\in S}C(x,\xi)]$（定理1の第3辺）を引き算したものになる．従って，この場合のEVPIの1つの上界として$E[C(x(\bar{\xi}),\xi)]-\min_{x\in S}C(x,\bar{\xi})$を得る．決定変数，確率変数を各々平均に関するもので代用して得られていることに注意したい．

一方，機会制約条件問題に対しては情報の価値を評価すること自身いろいろな考え方があり，Blauのジレンマ[1]は有名である．すなわち，当然成り立つべきだと思われるEVPI≧EVSIやEVPI，EVSIの非負性が成り立たないとする例を示している．この辺りになってくると統計的意思決定理論と深くかかわってきて，いわゆるBayes派，非Bayes派の間の論争が避けて通れないようである．

ところで，確率計画法というぐらいで，従来は“確率的”接近法が中心であった．しかし，確率変動要素の確率分布が既知であることは稀である．一方で，実際に解くには，確率分布が必要である．確率分布が全くわからなければ，等価確定問題に変換することすらできない．従って，何らかの確率分布の推定，あるいは分布のクラスがわかっているのなら，その母数の推定が必要である．このためには，サンプルを用いて，統計的推定・検定，さらには，多変量解析の理論を駆使することが必須となるであろう．この“統計的”な確率計画法の取り扱いのはしりには既出のJ. Braken and R. M. Soland [2]やR. Jagannathan [6]があるが，本格的研究は最近であり，Jatika Dupacovaやその一派のT. Cipraおよび森田等によるものがある（森田による本誌での紹介[9]が詳しい）．

確率分布の母数が未知の場合の森田等によるモデルについてここで紹介する．次の線形計画問題P_4を考える．

P_4：最小化 cx

制約条件$Ax=b,\ x\geq 0$

ここで，A，b，cは各々$m\times n$行列，m次元縦ベクトルn次元横ベクトル，xはn次元縦ベクトルで決定変数，0は成分が零のみからなるn次元縦ベクトルとし，bのみが確率変動要素で，多変量正規分布に従うことがわかっているが，その平均，分散は未知とする．この未知パラメータを大きさNのサンプルから信頼領域Sにより推定する．すなわち，

$$\begin{aligned}S=\{(\mu_i,\sigma_i^2),i=1,2,\cdots,m \mid &\sum_{i=1}^{m}(\mu_i-\bar{\mu}_i)^2/s_i^2\\ &\leq\frac{m(N-1)}{N(N-m)}F_m^{N-m}(\alpha/2),\frac{(N-1)s_i^2}{\chi^2_{\beta/2}(N-1)}\leq\sigma_i^2\\ &\leq\frac{(N-1)s_i^2}{\chi^2_{\beta/2}(N-1)},i=1,2,\cdots m\}\end{aligned}$$

ここで，μ_i,σ_i^2はbの各要素b_iに対する平均と分散μで，$\bar{\mu}_i,s_i^2$はそのサンプル平均とサンプル分散，$F_q^p(\gamma)$は自由度(p,q)のF分布の上側100γ%点，$\chi^2_\gamma(p)$は自由度pのカイ2乗分布の上側100γ%点であり，Sは，厳密には信頼係数100（$1-\alpha$）%の信頼域の近似である（分散の推定は厳密には各成分の分散についての様な分離型にはならない）．Sにより限定された正規分布の部分クラスを$\tilde{F}$で示し，以下のミニマックスモデルP_5を考える．

P_5：最小化$\mathop{\mathrm{Maximize}}_{F\in\tilde{F}}\ cx$

制約条件$Ax=b,\ x\geq 0$

ここで，Fはbの確率分布関数である．

最小化$\mathop{\mathrm{Maximize}}_{F\in\tilde{F}}\ cx$は意思決定として$x$をとったときの部分クラス$\tilde{F}$の中で最悪の場合を想定したもので，それを最小にするというゲーム理論的考え方に基づいている．さらに，確率変動要素についてはhere and nowの立場から2次リコースをもつ2段階問題P_6を考えることになる．

P_6：最小化

$\mathop{\mathrm{Maximize}}_{F\in\tilde{F}}\ cx\,\{cx+\int\cdots\int\sum_{i=1}^{m}w_i(A_ix-t_i)^2$

$d dF(t_1,t_2,\cdots t_m)\}$

制約条件$x\geq 0$

ここで，w_iは2次リコースを規定する定数である．

この他のミニマックスモデルとしては，もっと条件が簡単な連続型ナップサック問題，目的関数の係数を推定する問題なども考えている（詳しくは[9]参照）．

この連続型ナップサック問題は以下のように機会制約条件問題P_7が基になっており，$O(n^2\log n)$の計算手間で解くことができる．

P_7：最小化　f

制約条件　$\Pr\{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\leq f\}\geq\alpha$

$\sum_{i=1}^{n}a_jx_j=b,0\leq x_j\leq b_j,j=1,2,\cdots n$

ただし，$c=(c_j)$は正規分布に従う確率変数である．

さらには，逐次的にサンプルが得られ，問題自身および最適解も変化するadaptiveな確率計画モデルも考えられている［9］．推定や予測を用いるモデルでは対応する確定問題として，非線形問題のあらゆるタイプのものが出てくる．従って，実際に解く段になると非線形計画の手法を駆使する必要がある．例えば，条件式を回帰を用いて推定する問題では，確定問題としては逆凸計画問題となる．一方で，等価確定問題に変換しないで解く試みもあり，その場合は確率的劣勾配，確率的準勾配（stochastic subgradient, stochastic quasi-gradient）を用いる方法が一般的であるが，このときは確率近似法との関連性が出てくる．

4．おわりに

確率計画法では離散決定変数の方が連続決定変数よりも確率計算がやりやすいことがある．バブルがはじけて，最近は投資熱ももう１つのようであるが，投資の問題も確率計画法，特に確率的組合せ最適化の応用の１つと考えられる．もちろん，投資にはいろいろな接近法があり，確率計画がすべてではないが，情報が重要である点から，少なくとも３節での話が有用ではないかと思っている．実際，経済の分野でのこれまでのポートフォリオ問題は確率計画問題として考えられてきたものも多い．また，一見意外かもしれないが，農業問題への応用もある．有名なFreundのモデル［4］は米国北カロライナ州東部のある典型的な穀物最適生産問題を確率計画問題として取り上げている．じゃがいも，とうもろこし，肉牛，秋キャベツの４種類について，期間１から期間３まで考え，土地制約，労働力制約，資金制約の下，期待効用関数を最大にする作付けを求めている．農業こそはお天気まかせの“確率変動”に左右されるからであろうか？　また，我が国でも，農林水産省の南石氏が盛んに農業問題への応用をものにしておられる．

最後にこれからの研究課題，応用課題であるが，なんといっても実際の解法が問題で，離散近似やシナリオ統合とかいろいろ考えられているが，もっと工夫がいる．

参考文献

［1］ Blau, R. A. “Stochastic programming and decision analysis : An apparent dillemma, “Man. Sci. 21(1974) 271-276.

［2］ Braken, J. B. and R. M. Soland, “Statistical decision analysis of stochastic linear programming problems, “Nav. Res. Log. Quart. 13(1966) 205-225.

［3］ Charnes, A. and W. W. Cooper, “Chance constrained programming,” Man. Sci. 6(1959) 73-79.

［4］ Freund, R. J., “The introduction of risk into a programming model,” Econometrica, 24(1956) 253-263.

［5］ Ishii, H. et al. , “Stochastic spanning tree problem,” Discrete Applied Mathematics 3(1981) 76-85.

［6］ Jagannathan, R., “Use of sample information in stochastic recourse and chance constrained programming models,” Man. Sci. 31(1985) 96-108.

［7］ Jensen, J. L. W. V., “Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes,” Acta. Math. 30(1906) 175-193.

［8］ Madansky, A. M., “Inequalities for stochastic linear programming problem,” Man. Sci. 6(1960) 197-204.

［9］ 森田　浩“確率計画法とサンプル情報，”オペレーションズ・リサーチ，37(1992) 88-92.

［10］ Walkup, D. W. and R. J. B. Wets, “Stochastic programming with recourse,” Siam. J. on Applied Math. 15(1967) 1299-1314.