均衡モデル：相補性問題への招待

福島　雅夫

1.　はじめに

現実のさまざまな局面に「均衡」という概念がよく現れます．それらの定性的な分析や定量的な評価を行うには，数理モデルとして定式化する必要があります．簡単な場合には（線形または非線形）連立方程式として，あるいは（制約なしまたは制約つき）最適化問題として定式化することができますが，それらの枠組みには納まらない場合もしばしばあります．そのような場合でも相補性問題やさらに一般的な変分不等式問題と呼ばれる問題にまで枠組みを広げれば，大抵の均衡モデルを定式化することが可能となります．

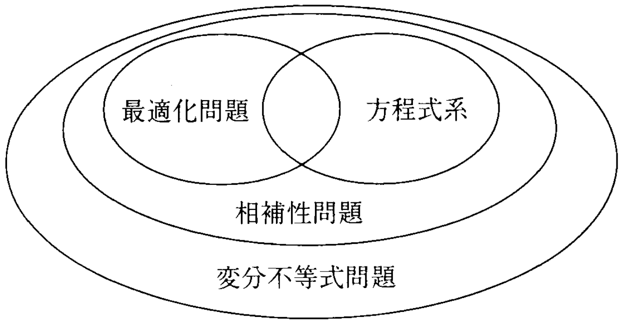

図 1: 問題のあいだの関係

上に述べた連立方程式，最適化問題，相補性問題，変分不等式問題の関係を図示すると図 1 のようになります．特に，制約なし最適化問題は目的関数の勾配（導関数）がゼロとなる点を求める方程式に対応しますから，図 1 の連立方程式と最適化問題の交わりの部分にあたると考えられます．

図 1 からわかるように，相補性問題や変分不等式問題は数理計画と密接に関係しています．しかし，残念ながら，変分不等式はおろか相補性問題についても詳しい記述がある数理計画の教科書は少ないのが実状です．実際，相補性問題や変分不等式問題それ自身には目的関数に相当するものがなく，制約条件のもとで目的関数を最小化するという形になっていないので，線形計画問題や非線形計画問題のようなふつうの数理計画問題とはやや異質なものという印象があるのかも知れません．しかし，相補性問題や変分不等式問題はさまざまな均衡モデルを定式化するのに非常に都合がよく，名実ともに数理計画問題の重要な一つのクラスに位置付けることができます．

ここでは相補性問題に重点をおいて，現実の均衡モデルがどのように定式化されるかを，交通流均衡問題を例にとってお話しします．次に，相補性問題を制約なし最適化問題に変換する面白い方法を紹介します．この方法の便利なところは，この特集の八巻先生の記事で紹介されているような普通の非線形最適化のソフトウェアを使って相補性問題が解けるようになることです．つまり，相補性問題だからといって特別なツールを用意しなくてもよくなるわけで，特にユーザの皆さんには役立つ考え方だと思います．そして，この記事の最後では，さらに今後ますます適用範囲を広げていくことが期待される均衡条件つき数理計画問題にも触れてみたいと思います．

2.　最適化モデル

この節では簡単な交通流均衡問題を例にとって，それがどのように定式化されるかを見てみましょう．

図2のように2地点AとBを結ぶ3本の道路a, b, cがあり，AからBへ毎時 d 台の車が移動している状況を考えましょう．知りたいことは d 台の車のうち道路a, b, cを利用する車はそれぞれ何台ずつかということです．ここで，各道路に対する所要時間は交通量が多くなればなるほど混雑のために増加するものとします．すなわち，道路aを利用する車の台数（交通量）を x_a とすると，各道路を通行する所要時間は図 3 のような交通量に関する単調増加関数 $f_a(x_a)$ によって表

ふくしま　まさお
京都大学大学院工学研究科数理工学専攻
〒 606-01 京都市左京区吉田本町
e-mail: fuku@kuamp.kyoto-u.ac.jp

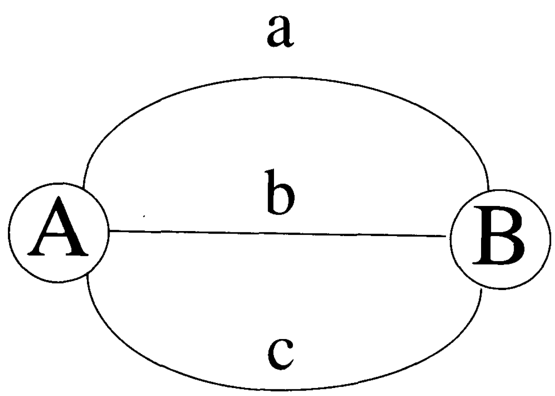

図 2: 道路網の例

されるものと仮定します(道路 b, c に対しても同様).そのとき,もしある道路が他の道路よりも所要時間が短いなら,車を運転する人(以下,利用者と呼ぶことにします)はその道路に殺到するでしょう.その結果,その道路の所要時間が大きくなってしまい,その道路の利用者はかえって不利な状況におかれることになるので,次の機会には別の道路を選ぶはずです.このような試行錯誤が繰り返されることにより,最終的にはすべての道路の所要時間がちょうど等しくなるように利用者が分散することが考えられます.これが**均衡状態**です.特に,交通流の分野ではこれを **Wardrop の等時間配分原理**による均衡状態と呼んでいます.

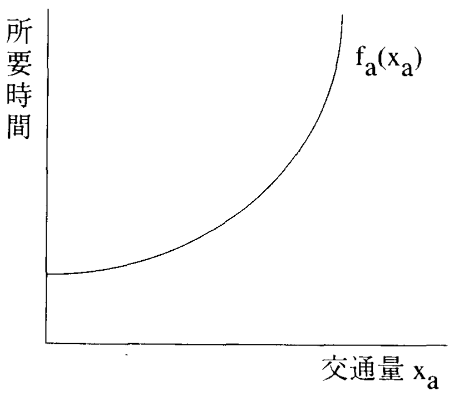

図 3: 道路の所要時間を表す関数

さて,この均衡状態を数学的に定式化してみましょう.まず,利用者が3つの道路に x_a, x_b, x_c 台づつ分散するとすれば,均衡状態は次のように表されます.

$$\begin{cases} f_a(x_a) = \lambda \\ f_b(x_b) = \lambda \\ f_c(x_c) = \lambda \\ x_a + x_b + x_c = d \end{cases} \tag{1}$$

ここで λ は均衡状態における A から B への所要時間を表す変数であり,式 (1) の最初の 3 つの式はその値がすべての道路に対して等しいことを要求しています.また最後の式は利用者数 d が 3 つの道路に配分されていることを示しています.式 (1) は 4 つの変数 x_a, x_b, x_c, λ を含む連立方程式とみなせますから,それを解くことにより,均衡状態における各道路の交通量と所要時間を求めることができます.

式 (1) は連立方程式による交通流均衡モデルの定式化になっていますが,以下に見るように,これに対する等価な最適化問題を構成することも可能です.そのため,関数 $f_a(x_a)$ に対して関数 $F_a(x_a)$ を次式で定義しましょう.

$$F_a(x_a) = \int_0^{x_a} f_a(t)\,dt \tag{2}$$

さらに,関数 $f_b(x_b)$, $f_c(x_c)$ に対しても同様に関数 $F_b(x_b)$, $F_c(x_c)$ を定義し,次の制約つき最適化問題を考えます.

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数:} & F_a(x_a) + F_b(x_b) + F_c(x_c) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件:} & x_a + x_b + x_c = d \end{array} \tag{3}$$

そのとき,式 (2) より

$$F'_a(x_a) = f_a(x_a)$$

($F'_b(x_b)$, $F'_c(x_c)$ も同様) が成り立つことに注意すれば,式 (1) は問題 (3) に対する最適性条件 (Kuhn-Tucker 条件) にほかならないことがわかります.(ただし,式 (1) の λ は問題 (3) の制約条件 $x_a + x_b + x_c = d$ に対するラグランジュ乗数に対応しています.) 特に,$f_a(x_a), f_b(x_b), f_c(x_c)$ が単調増加関数であることから,$F_a(x_a)$, $F_b(x_b)$, $F_c(x_c)$ は凸関数になるので,Kuhn-Tucker 条件は最適性の必要十分条件となり,式 (1) と問題 (3) は等価であることがわかります.このようにして,交通流均衡問題は制約つき最適化問題として定式化できることがわかりました.

上の定式化では暗黙のうちに,式 (1) を満たす均衡状態 (つまり問題 (3) の最適解) において各道路の利用者数 x_a, x_b, x_c は正であることを想定していました.しかし,実際には必ずしもそうなるとは限りません.例えば,道路 c は a と b に比べてかなり距離が長く,道路 a と b が混雑して道路 c がガラガラに空いているような場合でも,道路 a と b のほうが道路 c より所要時間が短いと仮定してみましょう.すると当然,道路 c を実際に利用する人はいないはずです.このような場合を考慮すると,上に述べた Wardrop の等時間配分原理は次のようにいうことができます.

利用者のある経路の所要時間は利用者のない経路の所要時間以下であり，利用者のある経路が複数存在するときには，それらの経路の所要時間はすべて等しい．

図2の例に対して，この性質は次式のように表現できます．

$$\left\{\begin{array}{l} f_a(x_a) \geqq \lambda, \quad x_a \geqq 0 \\ f_b(x_b) \geqq \lambda, \quad x_b \geqq 0 \\ f_c(x_c) \geqq \lambda, \quad x_c \geqq 0 \\ x_a > 0 \Rightarrow f_a(x_a) = \lambda \\ x_b > 0 \Rightarrow f_b(x_b) = \lambda \\ x_c > 0 \Rightarrow f_c(x_c) = \lambda \\ x_a + x_b + x_c = d \end{array}\right. \tag{4}$$

ここで λ は利用者がある道の所要時間 (つまり A から B への最短所要時間) を表しています．これらの式の最初の6つが上に述べた等時間配分原理を表していることは明らかでしょう．式 (4) はさらに次のように書き換えることができます．

$$\left\{\begin{array}{l} f_a(x_a) \geqq \lambda,\ x_a \geqq 0,\ x_a\,(f_a(x_a) - \lambda) = 0 \\ f_b(x_b) \geqq \lambda,\ x_b \geqq 0,\ x_b\,(f_b(x_b) - \lambda) = 0 \\ f_c(x_c) \geqq \lambda,\ x_c \geqq 0,\ x_c\,(f_c(x_c) - \lambda) = 0 \\ x_a + x_b + x_c = d \end{array}\right. \tag{5}$$

この最初の 3 行の式はいわゆる相補性条件と呼ばれるものになっています．つまり式 (5) は x_a, x_b, x_c と λ の 4 つの変数をもつ**相補性問題**であり，これを解くことにより Wardrop の等時間配分原理にしたがう交通流が求められることがわかりました．(式 (5) の最後の式は等式なので，厳密には混合相補性問題と呼び，そのような等式を含まない純粋な相補性問題と区別することもありますが，本質的に両者には大きな違いはありません．)

ところで，式 (1) が問題 (3) の Kuhn-Tucker 条件になっていたことを思い出しながら，式 (5) を式 (1) と見比べてみましょう．これらの式が不等式制約条件を含む最適化問題

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & F_a(x_a) + F_b(x_b) + F_c(x_c) \rightarrow \text{最小} \\ \text{制約条件：} & x_a + x_b + x_c = d \\ & x_a \geqq 0, x_b \geqq 0, x_c \geqq 0 \end{array} \tag{6}$$

に対する Kuhn-Tucker 条件になっていることに気づきましたか?つまり，問題 (6) の最適解は Wardrop の等時間配分原理にしたがう均衡状態にほかならないのです．

これまでの話では，均衡状態を定式化するためにまず連立方程式 (1) や相補性問題 (5) を考えましたが，それらは結局，問題 (3) や問題 (6) のような最適化問題と実質的におなじということになってしまいました．それでは，均衡モデルを定式化するのに，特に相補性問題などを持ち出さなくても，ふつうの最適化問題の枠組みで十分なのでしょうか？

3. 最適化モデルから均衡モデルへ

前節で述べたモデルでは，各道路の所要時間はその道路の交通量にのみ依存すると仮定していました．この仮定が妥当とみなされる状況においては，最適化問題による定式化は有効です．しかし，現実にはそのような仮定が妥当といえない場合がしばしば存在するのです．図2のモデルでは構造が簡単すぎて実感に乏しいかも知れませんが，多くの道路が複雑に絡み合っている道路網を想像すれば，ある道路の所要時間はその道路の交通量だけでなく，その道路と交差する道路が渋滞しているかどうかにも依存すると考えるのが自然でしょう．これは図2の例では，各道路の所要時間がそれぞれベクトル $\boldsymbol{x} = (x_a, x_b, x_c)$ を変数とする関数 $f_a(\boldsymbol{x}), f_b(\boldsymbol{x}), f_c(\boldsymbol{x})$ で表されると仮定することを意味します．つまり，Wardrop の等時間配分原理を定式化した相補性問題 (5) は次のように修正されます．

$$\left\{\begin{array}{l} f_a(\boldsymbol{x}) \geqq \lambda,\ x_a \geqq 0,\ x_a\,(f_a(\boldsymbol{x}) - \lambda) = 0 \\ f_b(\boldsymbol{x}) \geqq \lambda,\ x_b \geqq 0,\ x_b\,(f_b(\boldsymbol{x}) - \lambda) = 0 \\ f_c(\boldsymbol{x}) \geqq \lambda,\ x_c \geqq 0,\ x_c\,(f_c(\boldsymbol{x}) - \lambda) = 0 \\ x_a + x_b + x_c = d \end{array}\right. \tag{7}$$

ところで，関数 $f_a(\boldsymbol{x})$, $f_b(\boldsymbol{x})$, $f_c(\boldsymbol{x})$ に対しては，一般に式 (2) のような関数を定義することはできません．言い換えれば，相補性問題 (7) は，相補性問題 (5) と違って，問題 (6) のような最適化問題の Kuhn-Tucker 条件には対応していないのです．ですから，問題 (7) はとりあえず相補性問題として取り扱わざるをえません．

これまでの説明で，均衡状態を定式化するために連立方程式や最適化問題，ひいては相補性問題がどのように用いられるかを見てきました．ついでにもう少し一般的な状況を考えてみましょう．図2の例は1つの出発地 A から1つの目的地 B への交通流を考え，さらに，A から B へも 3 本の道で直接到達できるような単純な場合に話を限定して話を進めていました．しかし，現実の交通流モデルで対象とするのは，多くの

道路からなる道路網の上を，さまざまな出発地と目的地をもつ多数の車が流れているという状況です．このような状況をモデル化しようとすると，いわゆる多品種ネットワークフロー問題の枠組みを導入する必要があります．さらに，そのような枠組みにおいては，相補性問題をさらに一般化した**変分不等式問題**として交通流均衡問題を定式化することがよく行われています．話が少し複雑になるので，ここではこれ以上述べませんが，交通流モデルやそれ以外のさまざまな均衡モデルに関連する変分不等式問題については文献[1,4]などを参照されることをお勧めします．

4. 相補性問題をどうやって解くか

相補性問題の解法としては，線形相補性問題に対するレムケ法のようなピボット法系列の方法や内点法がよく知られていますが，ここでは最近注目を集めている「相補性問題を方程式系や最適化問題に変換する方法」を紹介しましょう．この方法の長所は，相補性問題専用の特別なソフトウェアを使わなくても，非線形方程式や制約なし最適化問題を解く汎用のプログラムがあれば，それをすぐに転用できるという手軽さにあります．もちろん，この変換によって得られた方程式や最適化問題のために設計された特別なアルゴリズムも研究されており，それらの方法を使えばさらに効率的に問題を解くこともできます．

相補性問題を非線形方程式に変換する最初の方法は1970年代半ばにO.L. Mangasarianによって提案されましたが，その後長いあいだあまり注目されませんでした．ところが1990年頃から，いくつかの新しい変換法が立て続けに提案されたことがきっかけとなり，このアプローチに対する研究が活発になっています．以下では，そのなかの代表的な一つの方法に的を絞って説明します．その他の方法を含むこのアプローチ全般についてもっと詳しくお知りになりたいかたは筆者のサーベイ論文[2]を参照してください．

この節では次の相補性問題に対して話を進めていきましょう．

$$\begin{cases} x_1 \geqq 0,\ f_1(\boldsymbol{x}) \geqq 0,\ x_1 f_1(\boldsymbol{x}) = 0 \\ x_2 \geqq 0,\ f_2(\boldsymbol{x}) \geqq 0,\ x_2 f_2(\boldsymbol{x}) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n \geqq 0,\ f_n(\boldsymbol{x}) \geqq 0,\ x_n f_n(\boldsymbol{x}) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は n 次元ベクトル変数です．なお，前節の相補性問題(7)には等式が含まれていましたが，以下では簡単のため，等式を含まない“純粋な”相補性問題を考えることにします．

ここで次の2変数関数を導入しましょう．

$$\varphi(a,b) = a + b - \sqrt{a^2+b^2} \tag{9}$$

この関数は次のおもしろい性質をもっています．

$$\varphi(a,b) = 0 \iff a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ ab = 0 \tag{10}$$

式(10)が成り立つことは，以下のように，容易に確かめることができます．

$$\begin{aligned} a + b = \sqrt{a^2+b^2} \quad &\Leftrightarrow \quad a+b \geqq 0,\ (a+b)^2 = a^2+b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a+b \geqq 0,\ ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a \geqq 0,\ b \geqq 0,\ ab = 0 \end{aligned}$$

関数 φ を用いて，次の連立方程式を定義します．

$$\begin{cases} \varphi(x_1, f_1(\boldsymbol{x})) = 0 \\ \varphi(x_2, f_2(\boldsymbol{x})) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \varphi(x_n, f_n(\boldsymbol{x})) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

すると，式(10)の性質よりただちに，連立方程式(11)は相補性問題(8)と等価であることがいえます．したがって，連立方程式(11)を適当な反復法(例えばニュートン法や準ニュートン法)を用いて解けば相補性問題の解が得られるというわけです．

このトリックの鍵は式(9)で定義される関数 φ にあります．この簡単な形をした関数は1992年に出版されたドイツの若手研究者A. Fischerの論文で初めて使われました．Fischer自身は彼の友人であるW. Burmeisterとのディスカッションのなかでこの関数を知ったといっていますので，現在ではこの関数はFischer関数あるいはFischer-Burmeister関数と呼ばれています．

連立方程式(11)を取り扱うときに一つ注意しなければならないことは，関数 φ はすべての点で微分可能ではないということです．つまり，$(a,b) \neq (0,0)$ であれば，φ は微分可能で，その微分係数は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial a} \\ \dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ 1 - \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

で与えられますが，$(a,b) = (0,0)$ のときには普通の意味での微分係数は存在しません．相補性問題(8)から定義された方程式(11)においてこの問題が生じるのは，計算の途中で，ある i に対して $x_i = 0$ かつ

$F_i(\boldsymbol{x})=0$ であるような点 $\boldsymbol{x}$ (このような $\boldsymbol{x}$ を退化点と呼びます) に出くわしたときです．理論的には，退化点においても一般化された微分係数というものが定義できるので，上に述べた難点はあまり問題にならないのですが，話がややこしくなるので，ここではこれ以上は立ち入らないことにします．実際には，退化点に出くわすことはあまりないと期待できるので，それほど心配することはないかも知れません．もし退化点が現れたなら，その十分近くの非退化点での微分係数で代用しておけばよいでしょう．

非線形方程式 (11) から，さらに次の制約なし最適化問題を定義することができます．

$$\text{目的関数：}\ \Psi(\boldsymbol{x}) \equiv \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i, f_i(\boldsymbol{x}))^2 \ \rightarrow\ \text{最小} \quad (12)$$

最適化問題 (12) の目的関数は常に非負であることに注意してください．このことから，問題 (12) の最適解 $\boldsymbol{x}$ において目的関数値が 0 になっているなら，それは方程式 (11)，すなわち相補性問題 (8) の解であることがわかります．つまり，最適化問題 (12) を解くことによって相補性問題の解を求めることが可能になるわけです．

最適化問題 (12) には一つの好ましい性質があります．それは関数 φ は微分可能ではないにもかかわらず，問題 (12) の目的関数 Ψ は (関数 f_i が微分可能なら) 微分可能になるという事実です．このことは

$$\psi(a,b) \equiv \frac{1}{2}\varphi(a,b)^2 = \frac{1}{2}\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$$

で定義される関数 ψ が微分可能であることからいえます．実際，関数 ψ の微分係数が

$$\frac{\partial\psi(a,b)}{\partial a} = \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial a}\varphi(a,b), & (a,b)\neq(0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (a,b)=(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\frac{\partial\psi(a,b)}{\partial b} = \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(a,b)}{\partial b}\varphi(a,b), & (a,b)\neq(0,0) \text{ のとき} \\ 0, & (a,b)=(0,0) \text{ のとき} \end{cases}$$

と表されることを確かめてみてください．関数 Ψ は微分可能ですから，問題 (12) は準ニュートン法のような制約なし非線形最適化手法によって解くことができます．つまり，相補性問題を非線形最適化の汎用ソフトウェアを用いて解くことが可能になるというわけです．(さらに，問題 (12) に対して，問題の性質を利用した特別なアルゴリズムも考案されています．) なお，問題 (12) に対して最適化手法を適用した場合，一般には局所的最適解しか得られませんが，もとの相補性問題 (8) が適当な条件を満たせば，問題 (12) の局所的最適解は相補性問題 (8) の解になることが保証されます．筆者もここ数年，この節で紹介したような方法について研究していますので，ひいき目かも知れませんが，このアプローチは非常に有望だと思っています．

5. 均衡条件をもつ数理計画問題

これまでの節では，均衡モデルの相補性問題による定式化とそれを解く方法について述べてきました．この節では，均衡モデルをもう一歩進めて，均衡条件を制約条件として含むような数理計画問題を紹介しましょう．この問題は，昔から 2 レベル計画問題と呼ばれてきた問題をもう少し一般化した問題とみなすことができ，実際にさまざまな応用が考えられます．しかし，問題を解く立場からみると，この種の問題は実は大変やっかいな問題で，満足のいく方法を開発するにはいくつもの難関をクリアしなければなりません．そして残念なことに (しかし筆者にとってはうれしいことに)，それらはまだ十分に解決されているとはいえないのが現状です．ですから，読者の皆さんにいま完璧なレシピを提供することはできませんが，近い将来，研究が大きく前進するよう努力することをお約束して，ここでは「こんな問題もあるんですよ」という感じでお話ししたいと思います．なお，この種の問題に関して現時点で得られている結果を収めた本 [3] がまもなく出版されますので，興味をもたれたかたはぜひ一読されることをお勧めします．

3 節で取り扱った交通流モデルをここでもう一度取り上げましょう．そのモデルでは，各道路の所要時間は交通流のベクトル $\boldsymbol{x}=(x_a, x_b, x_c)$ を変数とする関数 $f_a(\boldsymbol{x}), f_b(\boldsymbol{x}), f_c(\boldsymbol{x})$ によって定まると仮定していました．ここで，交通網を整備する立場から，各道路の道幅拡張工事や交通信号システムの改良などを行うことにより，道路の所要時間を短縮し，効率的な道路交通網を構築することを考えましょう．道路網の整備政策を決定変数ベクトル $\boldsymbol{y}$ で表し，その整備政策の結果として生じる所要時間の関数を $f_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), f_b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と書くことにします．これは，道路網を整備することにより，各道路の所要時間が短縮できることを意味しています．私たちの問題は，発生する交通流の状態の善し悪しを表すコストと整備政策の実施に要するコストの和を最小とするような道路網の整備政策を求めることです．

さて，整備政策 $\boldsymbol{y}$ が与えられたとき，道路網に生じる交通流は，式 (7) と同様の相補性問題

$$\begin{cases} f_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \lambda,\ x_a \geqq 0,\ (f_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\lambda)\,x_a = 0 \\ f_b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \lambda,\ x_b \geqq 0,\ (f_b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\lambda)\,x_b = 0 \\ f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \geqq \lambda,\ x_c \geqq 0,\ (f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\lambda)\,x_c = 0 \\ x_a + x_b + x_c = d \end{cases} \tag{13}$$

の解 $\boldsymbol{x}$ として定まります．そこで，発生する交通流 $\boldsymbol{x}$ の善し悪しを全利用者の所要時間の総和

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_a f_a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + x_b f_b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + x_c f_c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

で表すことにしましょう．関数 $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ の値が小さいほど，交通流は全体として円滑化／効率化が達成されていると考えることができます．また，整備政策 $\boldsymbol{y}$ の実施に要するコストは関数 $H(\boldsymbol{y})$ で，実行可能な整備政策の集合は $\boldsymbol{Y}$ でそれぞれ表されるものとします．そのとき，最適な整備政策を決定する問題は次のように定式化できます．

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + H(\boldsymbol{y}) \ \rightarrow\ \text{最小} \\ \text{制約条件：} & \text{式 (13) および}\ \ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y} \end{array} \tag{14}$$

この問題は一見するとふつうの数理計画問題と変わらないように見えますが，実はかなり複雑な問題です．これは，問題 (14) が式 (13) で表される相補性問題を内部に含んでいるためです．つまり，問題 (14) は二段階の階層構造をもっているとみなすことができます．このような問題を**均衡条件つき数理計画問題** (Mathematical Program with Equilibrium Constraints: **MPEC**) は呼ばれています [3].

ここで次の問題を考えてみましょう．この問題は非常に単純化されていますが，MPEC がどのような性質をもっているかを見ることができるでしょう．

$$\begin{array}{ll} \text{目的関数：} & x^2 + y^2 \ \rightarrow\ \text{最小} \\ \text{制約条件：} & 2x + 3y - 6 \geqq 0,\ x \geqq 0 \\ & x(2x+3y-6) = 0 \\ & y \geqq 0 \end{array} \tag{15}$$

この MPEC の実行可能領域は図 4 の太線で表された集合になります．この集合はもちろん凸集合ではありませんし，点 $(x,y)=(0,2)$ のところで折れ曲がっています．このような実行可能領域をもつ問題は，通常の非線形計画の手法を用いても最適解が得られる保証はありませんので，特別なアルゴリズムを用いる必要があります．MPEC に対してはこれまでにいくつかの方法が提案されていますが，いろんな意味でまだまだ十分とはいえません．数理計画における今後の大きな研究課題の一つです．

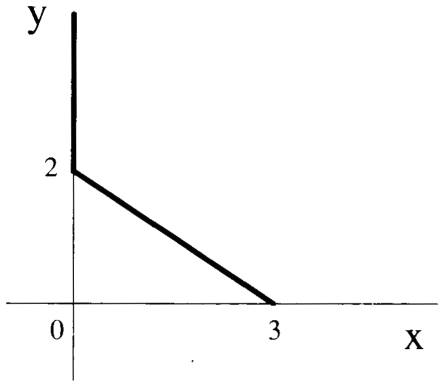

図 4: 問題 (15) の実行可能領域

6. おわりに

均衡モデルの相補性問題による定式化，それを等価な方程式系や最適化問題に変換する方法，さらに均衡条件つき数理計画問題について，交通流モデルを例にとって説明しました．この特集号は「なるべく数式は使わない」という方針だったのですが，モデルの定式化を説明する関係で，やむをえず違反してしまいました．また，適当な日本語の参考文献がなかったため，英語の文献をあげざるをえませんでした．このように均衡モデルは最適化モデルにくらべればまだポピュラーとはいえませんが，この小文を読まれた皆さんが均衡モデルに対して少しでも興味をもっていただくことができれば，筆者にとって最大のよろこびです．

参考文献

[1] M.C. Ferris and J.S. Pang, Engineering and economic applications of complementarity problems, Mathematical Programming Technical Report 95-07, University of Wisconsin, April 1995 (available via anonymous ftp from `ftp.cs.wisc.edu`).

[2] M. Fukushima, Merit functions for variational inequality and complementarity problems, in: G. Di Pillo and F. Giannessi, eds., *Nonlinear Optimization and Applications*, Plenum, 1996 (近刊).

[3] Z.Q. Luo, J.S. Pang and D. Ralph, *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, 1996 (近刊).

[4] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer, 1993.