理財工学：ファイナンスと数理計画法

今野　浩

1．社会科学と数理計画法

昨年暮れのとある夕方，メイル・ボックスの中に，厚さが5センチメートルを越す四角い物体が寝転んでいるのを見た瞬間，私の口からは思わず“遂に出たか”，という呟きが洩れてしまいました．

これこそ，2年半待たされた，岩波応用数学講座の最終巻．その包みの中には，必ずや竹内啓先生の「社会科学における数理的方法」が入っているに違いありません．家の中に入るなり，頑丈な包装を乱暴にむしり取り，手にした宝物は僅か100ページ余り．218ページ，188ページという巨巻に挟まれた，可愛らしい“お痩せさん”でした．

想い起せば，このシリーズには，もともと各分冊とも120ページを上限とする，という執筆要項があったはず．ところがそれが守られないのは業界の常識で，2倍を越える巻も珍しくありません．それはともかくとして，このようなテーマを100ページにまとめるという作業は，例えていえば「戦争と平和」を，原作の味わいを損なわないように100ページに濃縮するような難しい仕事ですから，竹内先生以外の著者を見つけることは不可能だったでしょう．

こんな話を最初に持ち出した理由は，この本には，数理計画法と社会科学の関わりについて，なるほど(あるいはやっぱりそうか）と思わされるいくつかの記述があったからです．

その第一は，数理計画法が，社会科学における数理的手法の中で，依然として重要な地位を保っている，という事実を確認できたことです．本来そうある筈だと信じ，特にファイナンスの分野での重要性を，鐘と太鼓で主張し続けてきた筆者にとって，これは大変心強い援軍に思われました．

第二は，序文の中に記された

> 社会科学の場合には，数学的方法によって具体的な答えが数値的に得られることはほとんどない．(中略）社会科学において数学を応用する目的は，具体的な答えを求めるよりも，理論における論理の整合性を確保し，理論的概念の意味を明確にすることにある．

という記述です．つまり経済学を含む社会科学では，未だ具体的な（定量的な）答を出すことにはそれほど重点が置かれていない，というわけです．これは要するに，(少なくともわが国では)具体的な答を求める作業は，社会科学者以外の人達に任されている，ということを意味しています．

実際には，具体的な答えが必要とされている問題が世の中に山ほどあるわけですから，数理計画法をはじめとするOR的手法が応用されるべき，広大な世界が開かれている，ということが確認されたわけです．

そこで以下では，従来は社会科学のテリトリーと考えられてきたファイナンスの分野で，数理計画法が果たしつつある役割を，なるべく数式を使わずに説明したいと思います．

2．金利は負の値を取り得るか

世の中に“金利”という概念があることを読者諸氏は御存知でしょうか．腹立たしい銀行預金の利子に代表されるあの金利です．さて，限りなくゼロに近づいているとはいうものの，この金利は今のところ辛うじて正の値を保っています．では，果たしてこの金利が負の値を取ることはあり得るのでしょうか．

この点に関して（金融）経済学者は，次のような論理を使って，金利は必ず正であることを論証します．いま，金利が例えばマイナス1％になったものとしましょう．この場合無一文のK氏が，今日銀行から10億円借りたとすれば，1年後に9億9千万円を返せば良いことになります．つまりK氏は，1年間に元手なしに，濡れ手で粟の1000万円の収入を得ることができるわけです．これをファイナンス用語では“裁定”といいます．このような旨い話が世の中にあるはずがない，

こんの ひろし 東京工業大学 〒152 目黒区大岡山2-12-1

あるとすればK氏だけなく，L氏もM氏もそれに群がるでしょう．その結果，金利は需要バランスを回復するために，（瞬間的に）0以上の水準に引き戻される．従って金利は常に非負であると，いうことになります．

タダメシ食いはできないという，この“無裁定条件”こそが，ファイナンスの世界では，すべての理論構築の根幹をなしています．因みに（金融）経済学では，この枠組みから外れた論文には，現在の金利水準程度以下の低い評価しか与えられません．ところがその一方で，将来の市場金利を記述するモデルを組み立てる際には，絶対的であるはずのこの条件が，しばしば数学的取扱いが難しい，という理由で無視されることがあるのです．以下ではその2つの例を挙げましょう．

(a) 金利の期間構造の推定

将来の金利がどのように推移するかを知ることは，現在住宅ローンを借りようとしているK氏にとっては，大変重要な課題です．変動金利で借りるか，それとも固定金利で借りるかべきか．例えばS銀行からお金を借りる場合，変動金利だと年2.625%，5年間の固定金利は年3.05%，10年間の固定金利だと年3.9%とかなり大きな開きがあります．近い将来金利が上昇すると予想されていることと不確定性が原因で，長期金利の方が高くなっているわけです．ではS銀行が，このような金利差をK氏に提示する根拠はどこにあるのでしょうか．このようなときに使われるのが，市場で売買されている債券価格をもとに，将来金利を計算する方法です．

いま半年ごとに2円のクーポンが支払われ，ちょうど10年後の満期に元本100円が償還される国債が，市場で売られているものとします．このとき，この国債の理論価格は，将来に得られるお金を現在価値に割り引いたものとなるということが，先の無裁定理論をあてはめることによって証明されます．つまり第t年に適用される割り引き率をd_iとすると，債券の理論価格Pは

$$P=2d_1+2d_2+\cdots+2d_{19}+102d_{20} \tag{1}$$

となるはずです．ところが様々な事情で，市場での債券価格が厳密にこの関係式を満たすとは限りません．そこで誤差項εを導入して，市場価格pを

$$p=2d_1+2d_2+\cdots+2d_{19}+102d_{20}+\varepsilon \tag{2}$$

と表現します．

市場には（満期とクーポン・レートが異なる）何十種類もの国債が発行されていますので，それらについても上のような式を立て，最小2乗法を用いて，誤差の2乗和を最小化する推定量（d_1, ……, d_{20}）を求めます．すると，第t期までの単位期間あたりの金利（スポット・レート）r_iは

$$(1+r_t)^t=1/d_i \tag{3}$$

で与えられます．

S銀行がK氏に提示する固定金利は，このような計算をベースにしています．ところがこの方法には，計算された割引率が必ずしも次の不等式

$$d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots\cdots \geqq d_{20} \tag{4}$$

を満たすとは限らない，という欠点があります．実はこの条件が満たされないと，将来のある期間に適用される金利が負となって，無裁定条件が破れてしまうのです．従って最小2乗推定を行なう際には，金利が負にならないことを保証するため，条件(4)を付けておくことが必要なはずです．この結果，問題は単なる正規方程式を解く問題ではなく，数理計画問題の一種である2次計画問題となります．

現在では，割引率や将来の金利水準（期間構造）を推定するための方法が，いくつも考案されています．そしてその大半は，上記の市場債券価格を用いた最小2乗法がベースとなっています．しかし，少し複雑なモデルになると，不等号制約条件付きの最小化問題……つまり数理計画問題……を厳密に解くのはヤヤコシイので，条件(4)を外して解いてしまう場合が珍しくありません．そして金利が負になるような結果が得られることがあったとしても，それは運が悪い，ということで済まされてしまうのです．(これは数理計画法に馴染みが薄い人々から見ると，別に珍しくもなんともないことのようです)

もし無裁定条件が絶対条件であるのならば，不等式制約条件の下での最小化条件問題，すなわち数理計画問題を解くことが必須であり，しかもそれが実際に可能であるというのが筆者たちの主張です [4].

(b) 金利変動の理論モデル

上で述べた話は稀な例外ケースかというと，そうではありません．将来の金利の動きを説明するモデルとして，よくブラウン運動理論が使われます．すなわち，金利水準rは時間とともに次の確率微分方程式

$$d_r(t)=a(r(t))\,dt+\sigma(t)\,dB_t \tag{5}$$

によって変化する，というモデルです（その代表例としてVasicekモデル，Hull-Whiteモデルなど([1, 3])があります．

(5)式の右辺の第1項は，金利のドリフト項と呼ばれ

るもので，時間 t とともに金利が平均的に $a(r)$ の割合で変化することを表しています．一方，第2項は確率変動項で，金利の変動が平均のまわりのブラウン運動を行なうことを表しています．この結果，ある時刻 t での金利水準 $r(t)$ は，平均のまわりに正規分布するという結論が導かれます．目下大勢の研究者が，$a(\cdot)$，$\sigma(\cdot)$ の関数型について様々な仮定をおいた上で，この方程式に取り組んでいます．また債券ポートフォリオ最適化に関わる数理計画モデルを組み立てる場合にも，方程式(5)に準拠することが，この世界では強く要求されています．

ところが，ここで気になるのが，特に金利水準が低くなったとき，金利水準が確率変動の影響で負になることがあるという事実です．するとこのモデルでは，無裁定条件を満たすことは絶対に不可能だ，ということになります．（なお σ が単なる t の関数でなく，r が小さくなると σ も小さくなるような工夫を施した Cox-Ingersoll-Ross モデルや Ait-Sahalia モデルを用いれば，金利が負になるのを防ぐことができます）

この他，株式の均衡価格を扱うモデルの場合も，経済学では非負条件を取り外して議論するケースが珍しくありません．しかし，株価が負になることは決して有り得ないことですから，正しくは非負制約条件の下の最適化問題，すなわち数理計画法の枠組で議論することが絶対に必要であることを指摘しておきましょう．

3．平均・分散モデルの数奇な運命

モダン・ポートフォリオ理論が，1952年のマーコビッツ・モデル [5] を出発点としていることは，どなたも御存知のことでしょう．多種類の資産に分散投資することによって，一定の収益率を確保しつつ，収益率の分散（もしくは標準偏差）で表されるリスクを最小化するというこのアプローチは，その分り易さと，具体的な投資プランを計算することができる，という2つの理由で発表当初から世間に広く受け入れられました．しかしその後長らくこの理論が冷や飯食いの生活を送ることになったことは余り知られていません．

ところで，マーコビッツがシカゴ大学に提出した学位論文が，“これは経済学の論文ではない”と言われたという話は有名ですし，先般同教授がノーベル賞を受賞した際にも，経済学者サイドから同じ批判があったそうです．我々から見ると，ファイナンス理論の基礎を築いたこの理論が，なぜ経済学でないと言われ続けてきたのか，いまひとつ分からない部分がありました．

ところがこのモヤモヤを解きほぐしてくれたのが，先の竹内先生の文章でした．つまり，実務家の役に立つような具体的な数値を算出する仕事は，もともと社会科学（特に経済学）に与えられた任務ではなく，これは誰かにやってもらうべき作業だというわけです．

筆者がここ10年近くにわたって，実務に役に立つファイナンス理論，すなわち理財工学を提唱してきたのは，実務家の役に立つ仕事をする“誰か”というのは，私たちORの専門家をおいて他に居ない，と考えたためです．今から8年前の1988年に，OR学会の中に「投資と金融のOR」研究部会を設立した折りにも，上と似た趣旨の文章を本誌に寄稿した記憶があります．そして，今またこれを繰り返さなくてはならないのは，OR学会におけるファイナンス人口がなかなか増えてくれないためです．

外国の例を取り上げるのはやや潔しとしませんが，敢えて言えば，Management Science誌に続いて Operations Research誌が，今年から Financial Service という新しい部門を設立したことを御存知でしょうか．

ここで思い出されるのが，スタンフォード大学のルーエンバーガー教授のことです．同教授はもともと制御理論や最適化法の権威で，数々の名著で日本でもファンが多いスターの1人ですが，80年代末からエンジニアとしてファイナンスの世界に参入し，すでにいくつもの論文を J. of Economic Theory などの雑誌に発表しています．

さて3年ほど前のことになりますが，同教授は大略以下のような愚痴をこぼして居られました．

“自動車メーカーのエンジニアが，自動車に関する問題を解決したいと考えたとき，果たして彼らは物理学者にお伺いを立てるでしょうか．いや彼ら機械工学者に相談するに違いありません．ところがファイナンス・ビジネスの実務家が，資産運用について何か問題があるときはどうするでょうか．おかしなことに，彼らはなぜかファイナンシャル・エンジニア（理財工学者）ではなく，経済学者の門を叩いてケムに巻かれて帰ってくるのです”と．

つまりファイナンス・ビジネス先進国である米国においてすら，状況は日本とそう大きな違いがあるわけではなく，現状を打破するには，理財工学者が隊列を組んで活動しなくてはならない，ということです．この意味で Operations Research誌の新機軸が，この分野に新しい地平を切り拓く上で，大きなモメンタムを

与えることは間違いありません．またこの他にも，ファイナンスの理論家と実務家の協同作業を可能とする場として，Financial Econometric and Engineering, Computational Economicsや，Computational Financeやらの学会や雑誌が次々と設立されていますので，ルーエンバーガー教授の嘆息もやがては過去のものとなることを期待したいものです．

話をマーコビッツ・モデルに戻しましょう．この理論が当初の人気にも拘らず，舞台の脇役に押しやられた最大の理由は，ごく最近までこのモデルすなわち実用規模の2次計画問題が，なかなか簡単には解けなかったところにあります．実際に家を建てるための方法として期待された理論が，安普請のバラックしか建てられないというのであれば，脇役にされても仕方なかったのかも知れません．この結果60年代，70年代そして80年代半ばまでは，経済学としてのファイナンス理論が全盛を極め，その余波が今も続いているという次第です．しかし，1980年代に入ると，OR畑出身のA. Peroldがマーコビッツ教授のアドバイスの下で，巨大な2次計画問題を効率的に解く方法を見つけ出しました[6]．それ以来，数年を経ずして，プレハブを飛び越えて，一挙にどんな豪邸でも建てられる道具が手に入ったのです．

事実現在では，10万銘柄を越すポートフォリオ・モデルが実用的時間の中で解けるようになったため，マーコビッツ・モデルは，資産運用にあって欠かせないツールとして劇的な復活を遂げました．また80年代後半には，わざわざ2次計画法を持ち出さなくても，より使い勝手の良い線形計画法で，マーコビッツ・モデルとほとんど同じ目的を達成できることが明らかにされました．それ以来，数百万変数からなる，多期間にわたる超大型ポートフォリオ最適化モデルが解けるようになっています．このところ米国では，パラレル処理コンピュータの最大ユーザは，抵当証券ポートフォリオ最適化に関わる（確率）線形計画モデルであるとさえ言われるくらい，この世界では超大型数理計画モデルが良く使われているのです．

4．アセット・アロケーションと統合モデル

平均・分散アプローチは，マーコビッツ教授がその著者[6]の中でもはっきり述べているとおり，本来はどのような資産に対しても適用可能なものです．

では，現実に投資顧問会社が，お客さんから預かった500億円のファンドを，株式や債券に分散投資するときには，どのような戦略が用いられているのでしょうか．標準的なテキストを開くと，そこには“アセット・アロケーション技法”が使われると，書いてあります．その概略は

(1) 何種類かの性質の異なる資産をグループ分けして，それを代表するインデックス（指標）を作成する．

(2) (1)で得られたインデックスを対象とする平均・分散モデル（マーコビッツ・モデル）を解き，各資産クラスへの資金配分額を決定する．

(3) (2)で各資産クラスに配分された金額を，別々のファンド・マネージャーが，各資産クラスの性質を理解した上で適切に運用する．

つまり，各資産はそれぞれ異なった性質をもっているので，それぞれ別のファンド・マネージャーが，独自の知識を生かして運用するというわけです．“なるほど”と思われるはずの分割統治戦略です．

ところが良く考えてみると，この方法にはいろいろ難しい問題が含まれています．その第1は，資産クラスを代表するインデックスとはそもそも何物か，という疑問です．その資産クラスを代表する個別銘柄でしょうか．確かにそういう場合もありますが，普通はそのクラスの銘柄全体の動きをシミュレートする合成銘柄，例えばTOPIXが使われます．

しかし，国内株式1118銘柄を1つのインデックスで代表させてしまうのでは，いくら何でも集約が行き過ぎてしまいます．何百銘柄もの国内債券を，1つのインデックスで代表させるのも同様です．そこで実際には，産業セクターなどを手掛かりに，国内株式を20～60程度に分類し，各々に対するインデックスを作ります．債券についても同様な作業を行ないます．そしてこれらの多くのインデックスを対象とする平均・分散モデルを解き，各サブクラスへの配分比率を決めてやります．後はこれらを再び適当な再グルーピングして，何人かのファンド・マネージャーが知恵を働かせて運用する－．再び皆さんは“なるほど”納得されたことでしょう．しかし実はそうではないのです．

問題はいくつかありますが，最大のポイントは，上で定めたインデックスが果たして信頼できるか，という問題です．第2は各クラス内での資産配分を具体的にどうするか，という問題です．何しろ500億円という大金ですから，ことは簡単ではありません．

最も手軽な方法は，配分された金額をちょうどインデクスと同じ振舞いをするように個別銘柄に配分する

やり方です．これをインデックス運用といいます．しかしそれでは（数理計画法さえ知っていれば）誰にでもできる単純作業ですから，ファンド・マネージャーは恐らくは専門知識を生かして，インデックスを上回る収益を実現するポートフォリオを追求するでしょう．

しかし，ここでインデックスから乖離したポートフォリオを組むと，全体として思いもかけぬ結果，つまり第1段階で行った資産配分の最適性が損なわれるかも知れません．要するに，

(1) インデックスをフォローするなら，資産クラスを別個に運用するファンド・マネージャーは不要である．

(2) インデックスを上廻る収益を組むのであれば，全体を調整するモデルが必要になる．

という次第です．

(2)についてはテキストには何も書かれていません．まさに各社秘中の秘というわけです．一方(1)の場合は，インデックスの信頼性が決定的に重要な役割を果たすことはいうまでもありません．

ここで論点をはっきりさせましょう．どこまで資産クラスを細分すれば，十分信頼に足るインデックスができるでしょうか．究極の答はもちろん，すべての個別銘柄をそれぞれ1つのインデックスと考えるやり方，つまり全体を1つにまとめた平均・分散モデルを解くことです．分割統治ではなく，全体統治アプローチという次第．

この場合問題となるのは果たしてこのようなモデルを実際に組立てることができるか，またその結果導かれる超大型平均・分散モデル（もしくはその Variant）を，実際にうまく速く解くことができるだろうか，という点です．答えはどちらも YES です．すでに述べたとおり，最近の数理計画法のモデリングと計算手法の進歩により，たとえ相手が10万銘柄を対象とする平均・分散モデルでも，いまや“容易”に解けるのです．

このあたりの議論は，アセット・アロケーション・パラダイムに住む人々から見ると異端であり，公式に認知されるまでには，まだかなりの歳月がかかるものと覚悟しています．しかし余り苦労せずに超大型数理計画問題が解けるようになったことからして，必ずや近い将来，世の中はこの方向に動くものと筆者は確信しています．

5．おわりに

昔から線形計画法には，「10年で10倍の法則」があてはまると言われてきました．つまり，10年ごとに10倍規模の問題が同一コンピュータ・リソース上で解ける，という意味です．ところが，1984年にはじまる内点法革命によって，この法則は何と上方に修正されたのです．この影響は即座に2次計画問題にも波及し，徐々に非線形計画問題，組合せ最適化問題の分野にも及び始めています．

このように，これまではとても解けないと思われてきた超大型数理計画問題が解けるようになると，その恩恵を受ける分野の最右翼に位置するのが「理財工学」である，というのが私の主張です．

この分野には，慎重を期して最適化を図らなくてはならない問題が山ほど残っています．国民から委託を受けた年金資産の運用，生命保険会社の資産運用，銀行の資産・負債管理など，どうやら中年から初老にさしかかったわが国において，ファイナンス・ビジネスが，諸外国の抜け目ない投資家と互角以上に戦って国富を維持するには，数理計画法をハードコアとする理財工学が重要な役割を担っているのです．

我田引水ここに極まる，といった文章になってしまいました．しかし理財工学が適正な評価を獲得するためには，“リエンジニアリング”や“ウィンドウズ95”に負けないような大風呂敷も，時として必要かと考えた次第です．

なお，ここに記した内容について，より詳しいことをお知りになりたい方は，拙著［4］を御覧下さい．

参考文献

[1] Y. Ait-Sahalia, “Testing Continuous-Time Models of the Spot Interest Rate”, Technical Report. The University of Chicago, 1994. (to appeart in *J. of Finance*)

[2] H. J. Elton and N. J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, (4th ed). John Wiley & Sons, 1991.

[3] 木島正明，「ファイナンス工学」，I，II，III，日科技連出版社，1994，1996.

[4] 今野　浩，「理財工学：平均分散モデルとその拡張」，日科技連出版社，1995.

[5] H. Markowitz, *Portfolio Selection : Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, 1991.

[6] A. Perold, “Large Scale Portfolio Optimization”, *Management Science*, 30, (1994) 1143-1160.

[7] 竹内　啓，社会科学における数理的方法，岩波書店，講座応用数学，第15巻，1995.