数理計画：問題解決への広き門

茨木　俊秀

1.　はじめに

大学への通勤の途中に小さな教会があって、そこに「狭き門より入れ、広き門より入る人は多いが、...(マタイ伝７章)」というような言葉が書いてあります。そういえば、昔読んだアンドレ・ジイドにも同名の小説がありました。これを見ながら、今回はひとつ、「数理計画」が問題解決への広い門であることを強調してみようと思い立った次第です。というのは、多くの人にとって数理計画が大変「狭き門」に映っており、その中へ入るのをためらわせているような気がするからです。

さて、日々の生活から、企業、組織、さらには国際社会に至るまで、世の中に解決を迫られている問題は尽きることがありません。オペレーションズ・リサーチは、これらの問題を解決するための学問であるといってよいのですが、とりわけ数理計画は、問題の解決策を最適解という形で提供できるという点で他と異なっています。しかし、数理計画が、数学的に高度な発展を遂げてしまったために、それを利用するにも、数学的に高度な知識がなければならないという印象を与えてしまったような気がします。でもそんなことはありません。解決すべき問題を、数理計画問題にモデル化し、データを入力しさえすれば、あとは、数理計画のソフトが、最適解を求めてくれるからです。

オペレーションズ・リサーチの他にも、問題解決を標榜している分野・手法はたくさんあります。人工知能、エキスパートシステム、ニューラルネットワーク、ファジイ理論、ソフトコンピューティング、創発システム、など新しい名前が次々と生み出されています。守備範囲はおのずと異なっていますが、数理計画ほど対象を深く解析し、精密な解を提供してくれるものは他にはありません。そのことを理解するには、まず使ってみるのが一番だというのが私の意見です。使ってみれば、数理計画が、問題解決への「広き門」であることが、実感できるはずです。

さて、この記事では、本特集のトップバッターとして、数理計画を使うには問題をどのように定式化するのか、数理計画の問題にはどのようなタイプがあるのか、またそれらはどのように役だっているのかなどをざっと紹介していきたいと思います。この特集の他の記事へのポインターも適宜付します。ただ、大学で数理計画の講義を取ったことのある人には、その最初の１、２回で学ぶことばかりですので、寝ころびながら読み飛ばしてもらえば、十分です。

いばらき　としひで　京都大学大学院工学研究科数理工学専攻
〒606 京都市左京区吉田本町
Email: ibaraki@kuamp.kyoto-u.ac.jp

2.　制約条件と目的関数

どのような問題でも、解決策を考えるとき、その範囲を定める**制約条件**が存在するのが普通です。この制約条件を、決定すべき変数を用いた不等式や等式の組で表現するというのが、数理計画への定式化の第一歩です。こう書くと、大変抽象的で難しく聞こえてしまうのですが、例で説明すると、実は、簡単なことです。

仕事のブレークに飲むためのコーヒー、紅茶、... などを買い整えようとコンビニへ出かけたとしましょう。それぞれの値段は、単位量 (g, ml など) あたり、次の表の通りです。

	コーヒー	紅茶	日本茶	ジュース
	x_1	x_2	x_3	x_4
値段: a_j	2.0	2.5	3.0	0.5
最大必要量	500g	300g	300g	1000ml

それぞれあまり買い溜めても仕方がないので、これも表に書いてあるように、最大必要量があります。また、欲しいものを欲しいだけ買えればよいのですが、あいにく財布の中には 2000 円しかありません。これらが制約条件です。制約条件を数式で記述するため

に、コーヒー、紅茶、... などの購入量を、$x_1, x_2, \ldots$ で表すことにしましょう。たとえば、コーヒーを x_1 g 買うと、1 g 当たり 2 円ですから、$2.0x_1$ 円かかります。他も同様に考えて、予算の制約は、

$$2.0x_1 + 2.5x_2 + 3.0x_3 + 0.5x_4 \leq 2000 \qquad (1)$$

と書けます。最大必要量の制約はもっと直接的で、

$$0 \leq x_1 \leq 500,\ \ 0 \leq x_2 \leq 300,$$
$$0 \leq x_3 \leq 300,\ \ 0 \leq x_4 \leq 1000 \qquad (2)$$

です。各変数に 0 以上という制約も付いているのは、負の値の購入量は意味を持たないからです。(1) と (2) を合わせたものがこの問題の制約条件であり、これらの不等式の範囲で、解 $x_j (j = 1, 2, 3, 4)$ を決定することが求められているのです。

上の制約条件を満たす解はたくさんあります。たとえば、$x_1 = \ldots = x_4 = 100$ も一つの解なら、$x_1 = \ldots = x_4 = 0$ だって立派な解です。どうせ買うなら、制約の範囲でできるだけたくさん、いや満足度が高くなるように買いたいものです。でもそのためには、満足度をきちんと定式化しておく必要があります。面倒くさがらずに、それぞれの飲物に対するあなたの好みの度合いを数値化してみましょう。少々もったいぶって、嗜好係数と名付けます。嗜好係数と購入量の積が、満足度を表します。

	コーヒー	紅茶	日本茶	ジュース
嗜好係数: c_j	2.0	2.3	2.5	0.3

全体の満足度は、単純に考えて、それぞれの満足度の和とし、

$$2.0x_1 + 2.3x_2 + 2.5x_3 + 0.3x_4 \longrightarrow \text{最大} \qquad (3)$$

と表しましょう。

式 (3) は**目的関数**と呼ばれ、数理計画問題のもう一つの基本的な要素です。一般に、数理計画問題は、(1)(2) のような不等式で書かれた制約条件の下で、(3) のような目的関数を最大(あるいは最小)にする解 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ を求めるという形に書かれます。この問題は、厳密に言うと、飲物最適購入問題となりますが、大層なので、以下ではティータイム問題と呼ぶことにしましょう。

与えられた制約条件に対し、それらを満足する解(**実行可能解**といいます)の存在を判定したり、それを求めるというのは、(とくに、制約条件が方程式系の場合)数学の基本的な問題として、昔から膨大な量の研究がなされてきました。しかし、目的関数を導入して、それを最大にする解(**最適解**といいます)を求めるという**数理計画問題**(あるいは**最適化問題**)の研究は、比較的新しく、線形計画法のシンプレックス法の生みの親として有名な、G. B. Dantzig に始まるとされています。もっとも、変分法など、最適化を扱う数学がなかったわけではないのですが、数理計画の実用上の重要さに着目し、一つの独立した分野として研究を始めたというところが、やはり Dantzig 先生の慧眼たるゆえんでしょう。

3. ナップサック問題とその最適解

上の問題を一般的に、

$$\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \text{最大} \\
&\text{制約条件：} && \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \qquad (4) \\
& && 0 \leq x_j \leq u_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}$$

と書いてみましょう。すなわち係数の 2.0, 2.5, ... などを a_j, c_j のように文字を使って表し、また変数の個数を一般的に n としています。でもこういう式を見たからといって、「あっ、難しい」と敬遠しないで下さい。こうすることによって、同じタイプのすべての問題例を一括して扱うことができる上に、個々の具体的な値を用いて述べるより、本質がよく分かるという利点もあるからです。ただし、実際に最適解を求めるときには、具体的な値をデータとして指定しておかなければなりません。

問題 (4) は、線形(1次式)の目的関数に、(変数の上下限の式を除けば)線形の不等式を1本だけ持っています。このような問題は**ナップサック問題**と呼ばれています。その理由は、一つ a_j の重さの品物 j をそれぞれ x_j 個(ただし、$j = 1, 2, \ldots, n$)、許容重量 b のナップサックに詰める問題と解釈できるからです。

ところで、ナップサック問題の最適解は、複雑なソフトを使うまでもなく簡単な計算で求めることができます。すなわち、

$$c_j / a_j,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

という比を考えると、ティータイム問題では、品物 j の1円当たりの満足度(すなわち、コスト・パフォーマンス)を表しています。おなじ1円を使うなら、こ

の比を最大にする品物に当てるのが有利ですから、全品をc_j/a_jの大きいものから順に並べ、その順に最大必要量まで購入していくという手が使えます。もちろん、予算を使いきるとそこで打ち切りです。このアイデアを先の例に適用してみましょう。

$$
\begin{aligned}
c_j/a_j: \quad & 2.0/2.0 = 1.0\ (\text{コーヒー}) \\
& 2.3/2.5 = 0.92\ (\text{紅茶}) \\
& 2.5/3.0 = 0.83\ (\text{日本茶}) \\
& 0.3/0.5 = 0.6\ (\text{ジュース})
\end{aligned}
$$

に従って、購入量は、この順にそれぞれ

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 500\ (\text{コーヒー 1000 円分}) \\
x_2 &= 300\ (\text{紅茶 750 円分}) \\
x_3 &= 250/3\ (\text{日本茶 250 円分}) \\
x_4 &= 0\ (\text{ジュース 0 円分})
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

となります。日本茶を 250 円買ったところで予算の2000円を使いきってしまいますので、ジュースを買うことはできません。このときの満足度は1898.3です。ここでは述べませんが、このようにして得られる解が常に最適であることを理論的にきちんと示すことができます。

4. 線形計画問題

上のティータイム問題の主な制約条件は、サイフの中身からきた式(1)だけでした。しかし、これ以外に制約がつくこともあるでしょう。たとえば、コーヒーと紅茶は似ているので、両方合わせてせいぜい 500g あれば十分だとか、いや紅茶と日本茶についても、両方で 300g 以下、あるいはジュースも少しは欲しいので、少なくとも 500ml 以上は購入するようにしたい、などです。これらを数式で書くと、

$$x_1 + x_2 \le 500,\ x_2 + x_3 \le 300,\ x_4 \ge 500 \qquad (6)$$

となります。この場合、式(1)(2)(6)の全体を制約条件として、式(3)の目的関数を最大にする問題が得られますが、これはもはやナップサック問題ではありません。このように複数個の線形不等式条件をもつ問題は、**線形計画問題**と呼ばれ、数理計画の最も代表的な対象となっています。

$$
\begin{aligned}
\text{目的関数:} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \text{最大} \\
\text{制約条件:} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& 0 \le x_j \le u_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

制約条件の数mと変数の個数nは、現実の問題では、何百、何千いや何万という大規模なものになることもあります。幸い線形計画については、シンプレックス法や内点法など、いろいろなアルゴリズムが詳しく研究されており、それらを組み込んだソフトも数多く開発されています。これらを用いると、パソコンやワークステーションでも、nとmが何百(場合によっては何千)程度の問題ならば、十分解くことができます。

ちなみに、このティータイム問題に対し、前の解(5)はもはや実行可能解ではありません。適当なソフトで最適解を計算してみると

$$
\begin{aligned}
& x_1 = 500\ (\text{コーヒー 1000 円分}) \\
& x_2 = 0\ (\text{紅茶 0 円分}) \\
& x_3 = 250\ (\text{日本茶 950 円分}) \\
& x_4 = 500\ (\text{ジュース 250 円分}) \\
& \text{満足度} = 1775
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

となります。この解がすべての制約条件を満たしていることは容易に確認できるでしょう。また、この程度の問題であれば、よく考えれば、最適性も証明できますが、ここでは、計算結果を信じてもらうことにします。

ところで、線形計画のソフトを使うにあたって、問題のデータはどのように入力するのでしょうか。もちろん、問題(7)の係数、c_j, a_{ij}, u_j, b_iを入力するだけなのですが、たとえば$m = n = 1000$という例ではa_{ij}だけでも100万個にもなってしまいます。しかし、多くのソフトには、入力の手間を軽減するための工夫が組み込まれています。0でない係数のみを入力する(これだけでも、全体の数パーセントですむことが多い)、他の類似の問題のデータを取り込んで変更部分のみ入力する、係数行列の規則的な部分については生成のためのソフトがついている、などです。さらに、本特集の八巻先生の記事には、次に出てくる非線形計画問題も含めて、より高度なデータの入力法が説明してあります。これらを使えば、データの入力は思ったほど大変でないことも多いのです。

5. 非線形計画問題

これまでの例では、制約条件と目的関数は共に線形(1次式)でした。現実の多くの最適化問題では、すくなくとも近似的には線形の扱いが可能な場合が多いのですが、そうでない例ももちろんあります。

たとえば、先のティータイム問題では、コーヒー x_1 g の満足度を $2.0x_1$ と書きましたが、これは線形の比例関係、つまり、購入量 x_1 が2倍になれば満足度も2倍になるという関係を表しています。しかし、x_1 が小さい内は $2.0x_1$ でよいが、大きくなるにつれて、満足度の増え方は減少して、下図の $f_1(x_1)$ ような曲線じゃないかという人もいるでしょう(これは、原点での傾きが 2.0 で、$x_1 = 500\ (= u_1)$ で傾きが 0 になる 2 次曲線です)。他の飲物についても同じように考えると、次の問題になります。

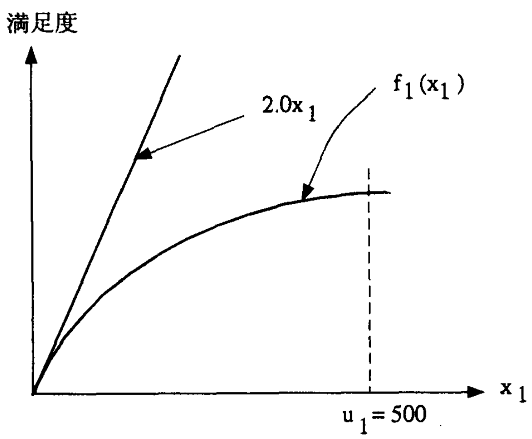

図 1: コーヒーの満足度曲線

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && \textstyle\sum_{j=1}^{4} f_j(x_j) \longrightarrow \text{最大} \\
&\text{制約条件：} && 2.0x_1 + 2.5x_2 + 3.0x_3 + 0.5x_4 \le 2000 \\
& && x_1 + x_2 \le 500,\ x_2 + x_3 \le 300,\ x_4 \ge 500 \\
& && 0 \le x_1 \le 500,\ \ 0 \le x_2 \le 300 \\
& && 0 \le x_3 \le 300,\ \ 0 \le x_4 \le 1000
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) &= -(2.0/1000)x_1^2 + 2.0x_1 \\
f_2(x_2) &= -(2.3/600)x_2^2 + 2.3x_2 \\
f_3(x_3) &= -(2.5/600)x_3^2 + 2.5x_3 \\
f_4(x_4) &= -(0.3/2000)x_4^2 + 0.3x_4.
\end{aligned}
$$

この種の問題は、線形に非ずということで、**非線形計画問題** と呼ばれています。この例では目的関数だけですが、制約条件に非線形不等式を考えることもあり、これらはすべて非線形計画問題です。

上の新しいティータイム問題を、非線形計画用のソフトを用いて解いてみると、

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 372.73\ (\text{コーヒー } 745.46\text{ 円分}) \\
x_2 &= 127.27\ (\text{紅茶 } 318.17\text{ 円分}) \\
x_3 &= 172.73\ (\text{日本茶 } 518.19\text{ 円分}) \\
x_4 &= 836.36\ (\text{ジュース } 418.18\text{ 円分}) \\
\text{満足度} &= 1151.73
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となります。曲線が関係するだけに、小数を含んだ複雑な数字になっており、またすべてをある程度ずつ買うという結果になっています。

非線形計画では、線形性にとらわれずに自由に目的関数や制約条件を選べるので、それがカバーする問題の範囲は大変広いものになります。逆に言うと、その中には数学的に難しい問題も含まれていますから、すべての非線形計画問題をすらすらと解いてしまうアルゴリズムを期待するのは無理というものです。しかし、非線形計画のアルゴリズムの最近の発達は著しく、また、ソフトも整備されてきていますので、あまりひねくれた問題でなければ、結構大規模なものも扱い得るようになってきています。このあたりの様子は、八巻先生の解説に詳しく書いてありますので、お読み下さい。

6. 整数計画と組合せ最適化

ティータイムはまだ続きます。上の例では、たとえばコーヒーを 372.73 g 買うという結果になりましたが、これを実行するのは実際には困難です。最近ではすべてパックになって売られているので、パックの整数倍でないと困るからです。話を決めてしまうために、パックの大きさは、コーヒー 200 g, 紅茶と日本茶は 100 g, ジュースは 500 ml としましょう。購入すべきパック数をそれぞれ y_j と記すと、ティータイム問題は、つぎのようになります。

$$
\begin{aligned}
&\text{目的関数：} && 400y_1 + 230y_2 + 250y_3 + 150y_4 \longrightarrow \text{最大} \\
&\text{制約条件：} && 400y_1 + 250y_2 + 300y_3 + 250y_4 \le 2000 \\
& && 200y_1 + 100y_2 \le 500 \\
& && 100y_2 + 100y_3 \le 300 \\
& && 500y_4 \ge 500 \\
& && 0 \le y_1 \le 2.5,\ \ 0 \le y_2 \le 3 \\
& && 0 \le y_3 \le 3,\ \ 0 \le y_4 \le 2 \\
& && y_1, y_2, y_3, y_4 : \text{整数}
\end{aligned}
$$

一見すると、線形計画問題と同じような形をしていますが、制約条件の最後にある整数条件がくせ者で、この条件のために数学的にもアルゴリズム的にも、全く異なった扱いをしなければなりません。一般に、線形

計画問題に (一部あるいは全部の) 変数の整数条件が加わったものを**整数計画問題**と呼んでいます。

さいわい、整数計画問題に対してもいろいろなソフトがありますので、その一つを使って解いてみると、

$$y_1 = 2\ (\text{コーヒー }800\text{ 円})$$
$$y_2 = 0\ (\text{紅茶 }0\text{ 円})$$
$$y_3 = 3\ (\text{日本茶 }900\text{ 円})$$
$$y_4 = 1\ (\text{ジュース }250\text{ 円})$$
$$\text{満足度} = 1700 \tag{10}$$

となりました。この解は、予算2000円のうち1950円しか使ってないのですが、どう考えてもこれより満足度を上げる解を作ることはできません。このあたりが整数計画の難しい、いやおもしろいところです。

整数変数 y_j を導入することで、パック数という離散的な量を扱えるようになったわけですが、世の中にはこのように離散的な (あるいは組合せ的な) 決定を迫られることがよくあります。とくに、ある計画を実行するかしないか、ある要素を選ぶか選ばないか、など、YES あるいは NO の答が必要な場合がよくありますが、これらは 0 あるいは 1 をとる変数を導入すれば定式化できます。

離散的あるいは組合せ的な性質を扱う問題は、より一般的に、**組合せ最適化問題**と呼ばれ、数理計画の重要な分野となっています。上のように、整数計画問題に直してからと解こうというのも一つの標準的なアプローチですが、問題ごとに専用の定式化とアルゴリズムを考えることもなされています。最近では、メタ・ヒューリスティックスと総称される近似アルゴリズムが盛んに研究されており、これについてはこの特集の久保先生の記事が大変参考になります。

7. 大規模な問題

ティータイム問題は変数を4個しか持たない、おもちゃのような問題 (toy problem) でした。しかし現実には多くの変数と制約式をもつ大規模な問題がいくらでも登場します。ここに、二つばかりそのような例をあげてみましょう。

n 地点 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を結ぶ通信ネットワークを考えます。ネットワーク中には m 本のリンク $l_1, l_2, \ldots, l_m$ が張られており、l_k の容量は u_k であるとします。簡単な例を図2に示します。いま、それぞれの (i,j) 対について $v_i \rightarrow v_j$ 方向の通信の要求量が d_{ij} であるとして、これらすべての通信のルートとそこを流れる通信量が、リンクの容量制限の下で実現できるでしょうか。l_k 上の通信 $v_i \rightarrow v_j$ の量を変数 x_{ijk} で表すと、一次不等式を用いて必要な制約を書くことができます。この問題では、変数 x_{ijk} が n^2m 個存在しますから、$n = 50, m = 100$ という比較的小規模なネットワークでも変数の数は25万個にもなってしまいます。

AT & T などの通信会社では、時間的に変動する需要 d_{ij} に合わせるために、このような問題を一定時間ごとに解いて、その時点の最適ルートを通して通信を行うというダイナミック・ルーティング方式を採用しています。そのため、きわめて大規模な問題を何度も解く必要があり、線形計画法の新アルゴリズムであるカーマーカー法が用いられたことでも話題になりました。

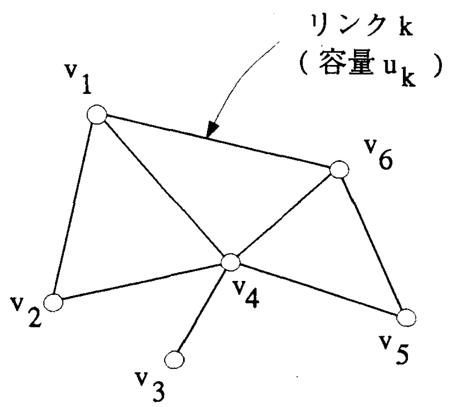

図 2: 通信ネットワーク

もう一つの例として、航空便の搭乗員スケジューリング問題を考えてみましょう。航空会社は、生き残りをかけて、経営の合理化にしのぎを削っていますが、たしかに、最近、出てくる食事はすっかり合理化され、スチュワーデスの数も少なくなったことを実感します。このパイロット、パーサー、スチュワーデスなどのスケジューリング問題は、各航空会社が頭を悩ませているものです。

簡単のため、各便に搭乗するパイロットのスケジューリングのみを取り上げます。計画期間中に、一人のパイロットが取り得るスケジュールの一つ、たとえば、今日成田からA便に乗ってニューヨークへ行き、一晩泊まった後、次の日のB便でニューヨークからロンドンへ飛び、さらにC便でロンドンから関西空港へ、といったものをレグ (leg) と言います。このようなレグの内、現実性のあるものを数え上げて、n 個求めたと

します。すると、m 便のすべてにパイロットを配置しなければならないという制約条件の下で、必要なパイロット数の最小化を図るという数理計画問題が得られます。

この問題は整数計画問題になるのですが、便数 m が少し大きくなると、可能なレグの個数 n は組合せ的に爆発してしまい、すぐに何万あるいは何十万という大きさになります。したがって、近似解法が試みられていますが、実用上重要な問題なので、人工知能やエキスパートシステムによるアプローチなども含めて、いろいろな問題解決手法の実験場となっている感があります。最近では、メタ・ヒューリスティックスの旗色が良いと聞いています。

この特集には、以上の他にも数理計画の興味深い応用がいろいろ扱われています。今野先生の「理財工学」では、ファイナンスの問題に関連して大規模な非線形計画問題が登場します。今野先生独特の語り口で、数理計画のような定量的アプローチの重要さが力強く述べられています。福島先生の「均衡モデル」は、相補性条件を持つ非線形問題であり、交通流にからむ問題を題材に、幅広い応用と解法が、最近の動向も含めて解説されています。久保先生の「タダより安い数理計画」では、組合せ最適化の代表的な例である配送計画問題が扱われています。そこで出てくるルート生成法は上のパイロット問題の解法と本質的に同じものです。

8. 定式化にあたって

現場の人たちと数理計画の話をすることがときどきあります。そこで、さあ制約条件と目的関数を書いてみましょうという段になると、「さて？」と頭をひねってしまうことが結構あります。日頃、制約条件とか目的関数を意識して整理したことはないという訳です。そこで、もう少し詳しく話をきいて、制約条件と目的関数の作成の手助けをすることになるのですが、対象とする問題をこのように系統立てて考え直すだけでも、問題に対する新しい理解が得られることが多いようです。その結果、数理計画のソフトを使うまでもなく、解決策の見当がついてしまうことすら少なくありません。

ところで、制約条件によっては、これまで述べたような不等式に書けないこともあります。データが不足していて書けない場合はもちろんですが、そうでなくても制約の内容が確率的であったり、ファジイな記述が避けられないという場合です。詳しく述べると長くなってしまいますので省略しますが、数理計画には**確率計画**や**ファジイ計画**もあって、このような状況に対処することができます。

また、制約条件と目的関数をどう区別するかということも、しばしば問題になります。ティータイム問題では、予算の制約を 2000 円としましたが、とくに 2000 円に限定することはなく、なるべく安くあげたいというのが本音なのかも分かりません。つまり、予算の式 (1) は、目的関数

$$2.0x_1 + 2.5x_2 + 3.0x_3 + 0.5x_4 \longrightarrow \text{最小}$$

とすべきだというわけです。

今までの定式化では、目的関数はつねに一つだけでした。これも考えてみればおかしな話で、現実の問題では、あれもこれも最適化したいというのが、むしろ普通かも分かりません。このような欲の深い人は、「二兎を追うものは一兎も得ず」と切り捨ててしまうこともできるのですが、心優しい数理計画はちゃんと**多目的最適化**という分野を準備しています。そこでは、複数個の目的関数のバランスを取って、いかに総合的な最適化を計るかが研究されていて、この目的のソフトも開発されています。詳しくは本特集の中山先生の解説を見て下さい。

数理計画問題へのモデル化にあたって大切なポイントは、重要な変数、制約および目的関数を厳選して、なるべくシンプルなモデルをつくることです。重要さの分からないものは、最初は無視してモデルを作ってしまい、得られた解を見ながら改めてその対策を考えるのが現実的です。このあたりのトレードオフを如何に行うかは重要で、問題解決に至るまでには、いくつもの数理計画のモデルを作っては解くという作業を反復することになります。

数理計画について次のような批判を聞きます。「…を解決するために、数理計画問題に定式化して最適解を求めたが、実際にはいろいろな理由で使えなかった。だから、数学的に厳密な最適解を求めても仕方がない。」でも、使えなかった理由は、最適解にあるのではなく、その元になっている数理計画のモデルが対象を正しく表現していなかったからです。正しいモデルを得る努力を怠っては、役に立つ情報が得られないことは、数理計画だけでなく、どのような問題解決手法にも共通しています。もう一度書きますが、シンプ

ルでしかも本質を的確にとらえたモデルの構築が、数理計画によるアプローチの成功の鍵をにぎっているのです。中山先生の記事でも、モデル化の重要性が議論されており、意思決定という観点からみれば、解法より大切だとさえ述べてあります。この点については、私も全く同意見です。

9. 意思決定支援システムへの道

数理計画問題へのモデル化は、私たちの問題に対する認識を数式という言語で記述していることに他なりません。数理計画では、この記述さえ与えれば、それを解くという作業は数理計画のアルゴリズム(つまり、ソフト)にまかせてしまうことができます。

しかし、世の中の複雑な問題が、すべてこのパターンで解決出来るとは限りません。初期の人工知能によるアプローチも、対象を論理的な言語で記述すれば、あとは論理的推論で解決策を見い出すことができると考えていました。しかし、この理想だけではシステムの効率があまりにも悪いことがすぐ明らかになり、つぎは問題の解き方に関して我々がもっている知識をいかに取り込むかがテーマになりました。いわゆるエキスパートシステムはその成果の一つです。

数理計画は、記述された問題を解く能力はきわめて高いのですが、やはりこれだけでは問題解決手法として限界があります。人工知能の場合と同じく、問題解決に役立つ知識を積極的に取り入れることが必要だと考えられます。これは、数理計画に基づく**意思決定支援システム**と呼ぶべきもので、数理計画がさらに発展して行くための一つの方向を示しているのではないでしょうか。この範疇に入るシステムも、具体的な問題については、結構見かけるようになってきました。今後の展開が楽しみです。

むすび

この特集の導入として、用語の説明と若干の応用例を紹介しました。かなり数式を使ってしまいましたが、話に具体性を持たせるため、やむを得なかったというのが言い訳です。

いや、数式はこわくない。それより数理計画を詳しく勉強したい、という殊勝な方もおられるかもわかりませんので、念のため、線形計画を中心に教科書的な参考文献を何冊かあげておきます。ただし、本箱をざっとみて目についたものをひろっただけですので、抜けがあるかもわかりません。

本文中の例題の数値解は、文献 [7] のソフトを用いて得ました。この本には、プログラムが別売りされていますので、簡単に試してみることができます。さらに最近では、久保先生の記事の中にも出てくるように、PDS (public domain software) として簡単に入手できるタダ (!) のソフトもたくさんありますので、ともかく身近な問題を解いてみることをお勧めします。

最後に、狭き門と広き門の話には続きがあります。聖書によると、広い門から楽に入った人は、実は、そのあと苦労することになるのです。これは、数理計画にあてはめてもかなりの真理を含んでいるような気がしますが、ここで深く追求することはやめておきましょう。楽に得られる成果だけでも結構大きなものがあるのですから。

参考文献

[1] 西川よし一、三宮信夫、茨木俊秀: “最適化”、岩波書店 (1982). [広い範囲の話題を要領よく.]

[2] 伊理正夫: “線形計画法”、共立出版 (1986). [線形計画の定評ある教科書.]

[3] V. フバータル (阪田省二郎、藤野和建、田口東訳): “線形計画法、上、下”、啓学出版 (1986). [線形計画の理論から応用までを詳しく. 名著.]

[4] 今野浩: “線形計画法”、日科技連 (1987). [単体法、2次計画、内点法などをやや詳しく.]

[5] 平本巌、木下昌男、栗原和夫: “パソコンパッケージによる例解線形計画法”、サイエンス社 (1986). [パッケージの計算例に基づく説明.]

[6] 坂和正敏: “経営数理システムの基礎”、森北出版 (1991). [線形計画、多目的、ファジイ、ゲーム理論など.]

[7] 茨木俊秀、福島雅夫: “FORTRAN 77 最適化プログラミング”、岩波書店 (1991). [各種最適化アルゴリズムのプログラム付き.]

[8] 森雅夫、森戸晋、鈴木久敏、山本芳嗣: “オペレーションズリサーチ I”、朝倉書店 (1991). [ORと数理計画の話題. 応用例がおもしろい.]

[9] 藤田宏、今野浩、田邊國士: “最適化法”、岩波講座応用数学、岩波書店 (1994). [最適化理論のコンパクトな紹介.]

[10] 一森哲男: “数理計画法”、共立出版 (1994). [線形、非線形、ネットワーク、組合せ最適化など.]