施設配置モデル—社会のための数学の例—

栗田　治

1　はじめに

ここでは都市の施設配置モデルの1つを解説する．これは，施設を何処に置いたらどの程度便利かといった評価を行ったり，最も便利にするためには何処に施設を置けばよいか(この置き方を最適配置と呼ぶ)を探求するためのモデルの名前である．

上でモデルという言葉を用いたが，これはプラモデルのモデル(模型)と同様の概念である．プラモデルは現物を真似て，適当な縮尺で再現する．ただし現物の全てを再現するわけではなく，大切な部分や性質だけを丹念に再現し組み立てるのである．すなわち，現実に存在する事物の大切な部分や性質だけを取り出し，取り出したパーツ(部品)同士の関係を考察することによって事物の本質を理解しようとするのが，ここで言うモデルといえる．

例えば“ニュートンの万有引力のモデル”もこのようなモデルの1つである．2つの物体の質量m_1, m_2[kg]を質点(面積や体積を持たない点)で代表させ，質点間の距離d[m]に着目する．このとき，物体間に働く力の大きさが$f = Gm_1m_2/d^2$と表される(単位はN(ニュートン))というのが“万有引力の法則”の表現である．ただし，$G = 6.6720 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2kg^{-2}}$は万有引力定数．このモデルでは，2つの物体がどんな材料で出来ているかとか，どんな色かとかいった情報を捨て去っている．

このように，モデルには「余分な情報を排除し，思考のために用いる技術」という側面もある．こうしたモデルは物理学だけで使われるわけではなく，(今回解説するように)社会現象を扱う分野でも誠に重宝なものである．人間や社会に興味のある諸君が，数学や物理学を学ぶことの大きな意義がここにあると言えよう．

読者諸君は，以下の内容によって，数学が，実は社会や人間に関わる問題を考えてゆく上でも至極大切な技術であることを理解してくれると思う．

くりた　おさむ　慶應義塾大学 理工学部
〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

2　施設配置問題の作成

まず人々が集まって利用するような施設を何か思い浮かべてみよう．これらは例えば，市民ホール，美術館，公民館などという都市施設である．そしてこれらの施設の特徴は，その地域に住む人々だれもが同じように利用する，ということである．

いま，ある町に$U_1, U_2, \cdots, U_n$のn人が住んでいることにする(利用者：Userの頭文字を用いた)．このn人が集まる都市施設の位置を点Fで表すことにし(施設：Facilityの頭文字を用いた)，図1–(a)にその様子を示す(この図は$n = 6$の場合の例)．

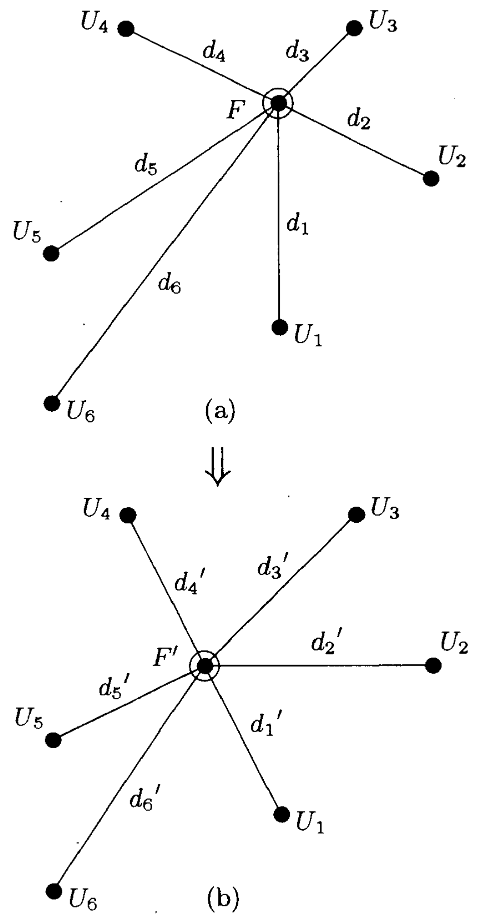

図 1: 住民の位置と施設の立地点($n = 6$の場合)．

このときn人は施設を利用するためにどれだけの距離を移動せねばならないか？いま，これらを直線距離で測ることにし，その値を図1–(a)にあるように，$d_1, d_2, \cdots, d_n$と呼ぶことにする．

さて，以上の準備の下で，n人が1度ずつ施設Fを訪れた場合の距離の和をTとすると

$$T = 2 \times (d_1 + d_2 + \cdots + d_n) \tag{1}$$

となる．(1)式でd_1からd_nまでの和を2倍にしているのは，施設から家まで帰ってくる距離も考えたからである．人々の移動の速さが共通の場合は，Tが小さいほど人々が移動に費やす時間も短くなるし，疲れる量も小さくなる．また人々が自動車で移動したとすると，ガソリンの消費量や排気ガスの発生量がTに比例することは言うまでもない．距離の和Tは社会の便利さや環境の保全を考える上で重要な指標なのである(物事の見当をつけるための目印(数値)を指標と言う)．

さて，ここで施設が図1–(a)のFではなく，図1–(b)のようにF'にあったとする(記号"$'$"はプライムと読む．F'はエフプライム．)．このとき，人々の位置から施設までの距離が$d_1', d_2', \cdots, d_n'$となったとしよう．この場合の距離の和をT'とすると，当然

$$T' = 2 \times (d_1' + d_2' + \cdots + d_n') \tag{2}$$

である．ここで，もしT'の方がTよりも小さな値だったとすると$(T' < T)$，皆が同様に集まる施設の位置としてはFよりもF'の方が優れていることになる．何故ならば，F'に施設を置いた方が，移動時間の和も小さくなるし，ガソリンの消費量や排気ガスの発生量も小さくなるから．

以上の考察から，自然に次の問題が浮かび上がる：

> [距離の総和を最小にする施設配置問題]
> 施設の位置Fを平面上でいろいろに動かして，n人からの距離の総和Tを最も小さくするようなFを見つけよ．

上で，私たちは現実世界から，"人の位置"，"施設の位置"という大切な部品を抽出した．そして"人から施設への距離"に着目して，施設の位置が与えられれば距離の和Tが決まる，というモデルを作った．つまり**"施設を何処に配置すれば距離の和がどんな値となるか，**を決める仕組みを(現実を真似て)こしらえたのである．その意味でこのようなモデルを**"施設配置モデル"**と呼ぶ．施設配置モデルが一丁上がり！

今回は，直観的に理解することが容易で，かつきちんと解が得られる便利な模型(文字通りの模型)を用いてこの問題を解くことにしよう．

3 施設配置の物理的模型

図2に示す模型は，工作の容易なアクリル板の上に複数個のピンを(接着剤で)固定したものである．そして，そのうち3個のピンには透明なボビン(ミシンの下糸を巻き取るための部品)がはめられている．この3つの透明ボビンが3人の住民の位置であるとみなして欲しい$(n = 3)$．ボビンを他のピンにもはめれば4人，5人という場合にも対応でる．また，ピンをあっちこっちにたくさん固定しておけば，どんな住民の数と位置にでも対応できるのは言うまでもないであろう．

ここでアクリル板の上に，今度は金属製のボビンを置き，これが施設の位置を表すものとする．さらに糸を一本用意し，その一方の端を1つの透明なボビンの軸(ある1人の住民の位置)に結びつける(図3の例では一番手前のボビン)．この糸を金属ボビンの軸(施設)に1回巻き付けては他の透明ボビンに引っかける，という操作を次々にしてゆこう．全ての透明ボビンに引っかけ終わったら，最初に糸を結びつけた透明ボビンに戻ってくることにする．以上の操作を行うと，図3の状態になる．

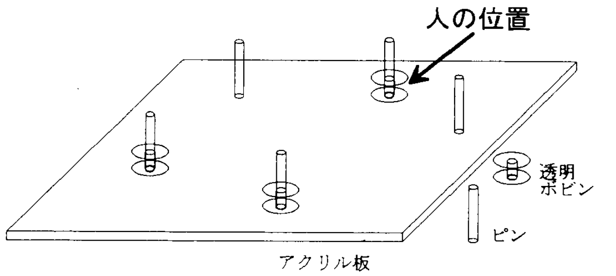

図2: 施設配置の模型(透明ボビンは住民の位置)．

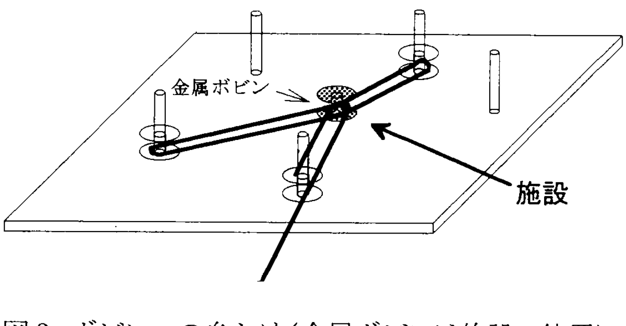

図3: ボビンへの糸かけ(金属ボビンは施設の位置)．

このとき，透明ボビンと金属ボビンとの間を行き来する部分の糸の長さに注目してみよう．この長さは，住民(透明ボビン)から施設(金属ボビン)への往復の距離を全て足し合わせたものになっている．即ち，この模型は，図4のように，距離の和Tを糸の長さによって真似たモデルなのである．

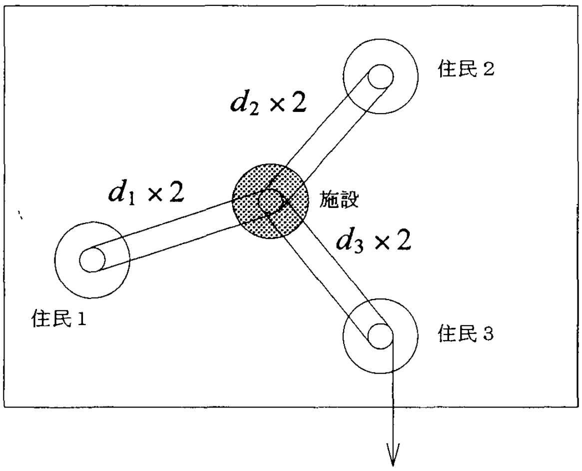

図 4: モデルの解釈 ($T = 2 \times (d_1 + d_2 + d_3)$).

3.1 模型を用いた最適配置の決定

さて，図3の模型を使って最適配置を決定してみよう．そのために図5のように，糸の端に錘をぶら下げることにする．ただし，糸とボビンの間には全く抵抗力が生じないものと仮定しておこう．すると錘は(重力のために)鉛直下向きにスルスルと下がっていく筈である．このとき金属ボビンの位置は，錘が少しでも下へ移動出来るべく，自動的に変化することになる．そして，“もうこれ以上錘は下がれない”という位置で停止する．

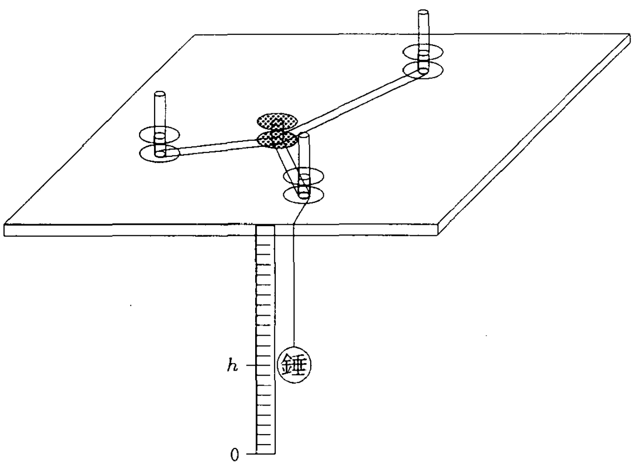

図 5: 糸の端の錘が目一杯下がった結果．

模型の結果は，私たちに何を語ってくれるのだろうか？以下に2つの側面から観察してみよう．

(1) 糸の総延長Tの最小化

まず，図5は私たちの施設配置問題における総延長，すなわちボビンとボビンとを結ぶ糸の総延長Tの最小化を成し遂げている．もうこれ以上Tを小さくすることは出来ない．何故ならば，もっと小さくすることが出来るとすると，糸はさらに繰り出されて，錘はもっと下に移動することになるからである．当然のことであるが，このときの金属ボビンの位置が，総距離を最小化する施設の位置になる．なんと，このような簡単な模型で施設配置問題の解が得られてしまった．

(2) 力の釣り合い

今度は模型を真上から見てみよう．そして金属ボビンに働く力に着目する．錘に働く重力によって金属ボビンは自動的に移動し，錘が最も下がった状態で，金属ボビンも停止している．ここで金属ボビンと透明ボビンを結ぶ糸の張力は，糸のどの部分でも等しいものとなっている．そしてその合力がゼロだからこそ金属ボビンは動かない．金属ボビンから見て，3つの透明ボビンの向きに働く力ベクトルを矢印で表すことにすると，図6のように大きさが等しい3つの力$\boldsymbol{f}_1$，$\boldsymbol{f}_2$，$\boldsymbol{f}_3$が釣り合っていることが分かるのである．

いま3人の住民(透明ボビン)のなす三角形の3つの内角がどれも120度未満であるとしよう．このとき，3つの力ベクトルが互いに120度で交わるとき(そしてそのときに限り)，(その合力は0となり)力の釣り合いが実現される．つまり，3人の住民から施設Fへ引いた線分が120度で交わるようにFを決めてやれば，施設配置問題の解が得られるのである．3人の住民が綱引きをするものと考えてもよい．3人ともが同じ大きさの力で引き合って釣り合うような3本の綱の結び目．最適な

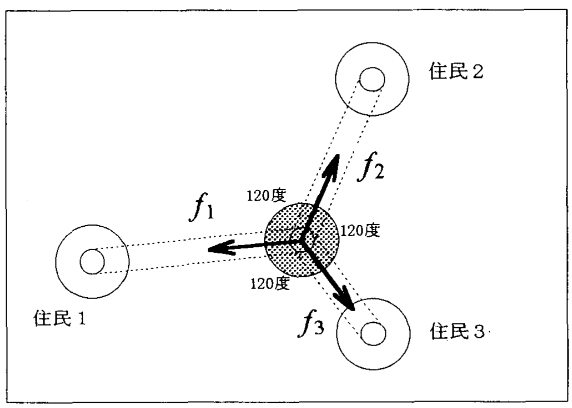

図 6: 金属ボビンに働く3つの力ベクトル．

施設の位置にはこんな意味もあるのである．ちょっと楽しくなる事実ではないだろうか?

3.2 n人の場合の解

3節の冒頭で述べた通り，この模型は3人の住民のみならず，どんな数の住民に対しても適用可能である．住民の数がn人($n > 3$)のときに図5のように錘をぶら下げることを考えてみよ．このときも，錘が下がれるだけ下がる，という事実は揺らがない．つまり，どんなn人の場合でも，やはり前述の2つの側面は全く同様に成り立つのである．n人の人々が同じ力で綱引きをする．n本の綱の結び目が落ちつく地点，そこが全員の移動距離の総和を最も小さくするような施設の位置を与えるのである．

ところで，n人の一般的な場合に模型を用いて施設の最適解を求めることには，実は少し無理がある．何故ならばこの模型は，ボビンと糸の間に全く抵抗がないことを仮定しているから．実際はこの抵抗を無視することが出来ない．したがって，ボビンの種類や糸の材質などをよほど吟味しないと，糸の総延長Tを必ずしも最小にしない状態で錘が止まってしまうのが普通である．この問題を厳密に解くには，コンピュータによる数値計算が必要である(後述する)．

3.3 解が持つ現実的な意味

以上で述べたような解が得られたとしても，その通りに施設を設けられるとは限らない．何故なら，施設を造るには，地価が予算に見合うか，土地利用上の制約はないか，等々の条件を克服せねばならず，これらの全てが思い通りにならない場合もあるからである．しかし，単純な想定の下での理論的で厳密な解は，「いろんなことを理想に近づければこんなにも良くなるのだ」とか「せいぜい頑張ってもこの程度にしか良くならないのだ」といった(努力の方向を探るための)重要な情報を与えてくれる．なお，より実際的な施設計画の観点からは，距離の総和Tの等高線図を用意し，地価等の要因と重ね合わせることに意味があると言える．今回の結果は，実はこのような等高線図を作成するための基礎でもあることを申し添えておこう．

4 おわりに

我々は，どこへ施設を置けば地域全体での移動距離の総和を最も小さくできるか?を考えた．このような社会的な問題の解を追求してゆくと，その背後には大変面白い物理的な性質が隠されていたわけである．その仕組みに知的興奮を覚えた諸君もいるに違いない．大切なことは，こうした考察が可能になったのも，適切なモデルを作ったからだということである．

なお，自然の中で物体の形状や配置が決定される仕組みを追求してゆくと，その背後には，エネルギー最小原理あるいは変分原理と呼ばれる重要な理(ことわり)が存在する．これらを学べば，最適配置の問題も，より一般的な立場から多面的に理解することができて，幸せ(な気分)になれる．そうした内容を，美しい写真や図を多用して，平易に解説した好著に文献[1]がある．

ところで，施設配置問題を厳密に解くにはコンピュータによる計算が必要であると述べた．そのためには，まず多変数関数の微分積分学を学ぶ必要がある．この講義は大学の理工系，経営系，経済系の学部の初年度に設けられることが多い．そこでは高校で学ぶ1変数関数の結果が，多変数関数へと自然に拡張される．さらにオペレーションズ・リサーチ(略してOR)の手法を学べばよい．これは，大学の，経営工学・管理工学・社会工学などの分野に関係した学科の専門課程で提供される．ORは，人間にとって望ましい状況を生み出すための各種の見積もりや資源の配分計画を，数学を道具にして提供するための技術体系である．ORは，様々な企業のプロジェクトをはじめ都市の交通運輸の計画に至るまで，実に多様な局面に適用されている．

応用問題

[**問題1**] 平面上に4人の位置が与えられているとする．このとき4人からの距離の和を最も小さくするような施設の位置を求めよ(解は誠に簡単な点になる)．

[**問題2**] 移動の総エネルギーを最小化する方法が相応しくない類の施設を(理由とともに)あげ，それらの施設の配置を適切に行うための理屈を述べよ．そして，平等な都市あるいは社会を設計することの難しさに想いを馳せるべし!

[**問題3**] 上では直線距離を前提として議論した．もしも京都や札幌のような直交する道路網の上で同様の議論を行なったら，如何なる結果になるだろうか?

参考文献

[1] Hildebrandt,S. and A.Tromba(1985) : *Mathematics and Optimal Form*, Scientific American, New York. (邦訳) 形の法則－自然界の形とパターン－，東京化学同人(1994)，小川　泰・神志那良雄・平田隆幸訳.