生産計画のモデル

大山　達雄

工場等において機械を用いて何らかの製品を製造する場合の製造費用を数式を用いて表現してみよう。さらにその製品に対する需要が与えられているとき、できるだけ製造費用が少なくなるように製造するにはどうすればよいかを考えてみよう。ここで製品に対する需要が確定している場合とそうでない(不確定)場合とに分けて、最も望ましい製品製造量を求める方法について考えてみよう。

確定需要の生産計画

ある機械1台を用いてある製品を作る場合の製造費用を考えてみよう。ここで製造費用としては、機械、設備、燃料等のセットアップなど機械を始動するのに必要な始動費用と原料費、燃料費、動力費等の機械を運転するのに必要な運転費用の2種類のみを考える。機械の始動費を a (円)、この製品を単位量(たとえば1 kg)だけ作るのに必要な機械の運転費を b (円/kg)とする。このときこの製品を x (kg)だけ作るのに必要な製造費用を y (円)とすると、yは製品製造量 x を用いて次のように表すことができる。

$$(1)\qquad y=\begin{cases} a+bx & x>0\ のとき \\ 0 & x=0\ のとき \end{cases}$$

したがって $a>0,\ b>0$ のとき、製品製造量 x (kg)と製造費用 y (円)との関係を表すグラフは図1のように y軸との切片 a, 勾配 b の直線となる。

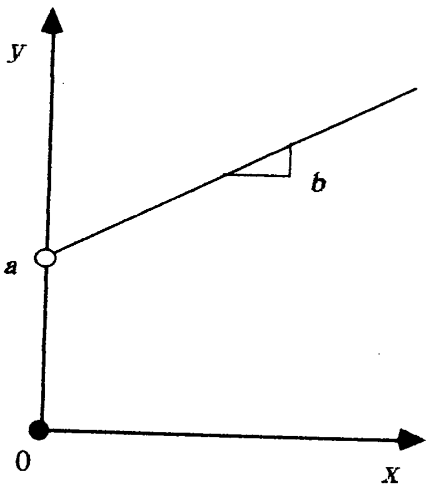

図1

次に2種類の機械 M_1, M_2を用いてある製品を作る場合の製造費用について考えてみよう。機械 M_1の始動費、製品を単位量(たとえば1 kg)だけ作るのに必要な運転費をそれぞれ a_1(円)、b_1(円/kg)、機械 M_2の始動費、運転費をそれぞれ a_2(円)、b_2(円/kg)とする。さらにこれらの費用の間には、始動費に関しては機械 M_1の方が機械 M_2より安く、また運転費に関しては機械 M_2の方が機械 M_1より安い、すなわち $a_2>a_1>0,\ b_1>b_2>0$ という関係が成立しているとする。いま製品を x

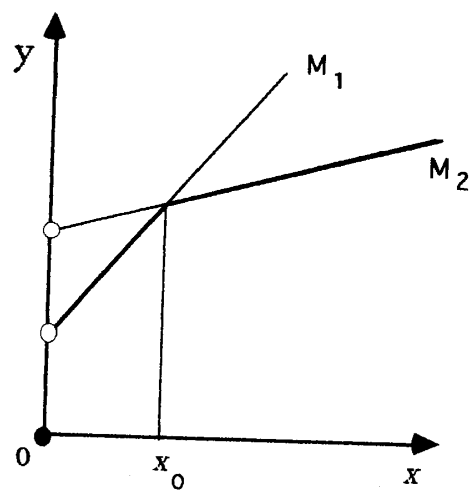

図2

おおやま　たつお
埼玉大学大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保255

(kg) 作るのに機械 M_1, M_2のいずれかより製造費用の安いものを用いるとすると、そのときの必要な製造費用 z(円) は機械 M_1, M_2の製造費用直線のうち下にある部分のみに相当する図2の折線の太線部分のように表される。

上述の関係から、機械 M_1と M_2による製品の製造費用が等しくなるのは、2つの製造費用直線の交点として、製品の製造量が $x_0=\frac{a_2-a_1}{b_1-b_2}$のときとなる。したがって製品の製造量が x_0より少ないときは機械 M_1を用いた方が安く、また製造量が x_0より多いときは機械 M_2を用いた方が安いことがわかる。このように複数台ある機械を用いてある製品を製造する場合、それぞれの機械による製造費用直線を用いて任意の製造量に対する製造費用の中で最小のものを選んで製造する方式は機械が何台ある場合にも適用することができる。

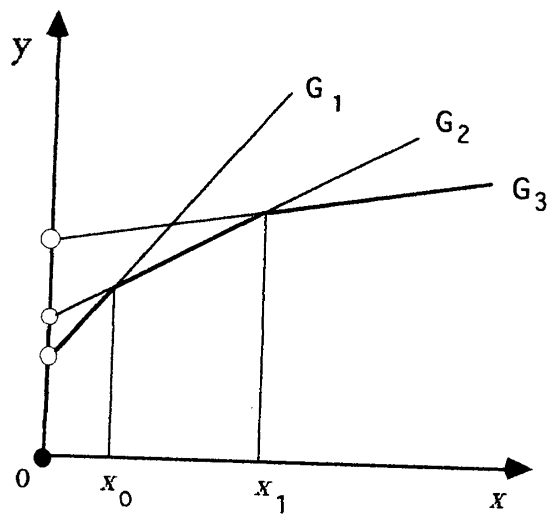

図 3

さて図1に示した製造費用直線が電気事業における原子力、火力等の発電方式別の発電費用直線を表すとしよう。たとえば図3に示す G_1, G_2, G_3の3本の発電費用直線はそれぞれ小型火力、大型火力、原子力の発電に要する費用を表すとする。すなわち横軸に各発電方式による稼働(発電)時間を表し、縦軸はそれだけの時間に対応する時間だけ発電する場合の発電費用を表すとする。したがって直線の y軸切片は発電時間が0の場合に対応し、各発電方式による資本費用(発電所建設費の1 kW当り年当費用に相当) のみとなる。また直線の勾配は発電電力量1 kWh当り稼働費用(燃料費、運転費に相当) を表す。このようにして任意の時間だけ発電する場合の発電費用は資本費と稼働費の総和となる。G_1, G_2, G_3の3本の発電費用直線の式をそれぞれ $y=a_i+b_ix, i=1,2,3$ とする。このとき小型火力、大型火力、原子力の資本費に対してはそれぞれ $a_1<a_2<a_3$という大小関係があり、また稼働費に対してはそれぞれ $b_1>b_2>b_3$という大小関係がある。すなわち小型火力、大型火力は原子力と比較して年当り資本費は安価であるが、単位発電電力量当り稼働費は高価であるという状況を表している。ここで図3に示すように小型火力と大型火力の発電費用が等しくなる稼働(発電) 時間を x_0、大型火力と原子力の発電費用が等しくなる稼働時間を x_1と表す。

いま1年間 ($T=365\times24=8760$) の電力需要が図4のように与えられているとする。すなわち年間稼働時間 t と電力需要 d の関係が

$$(2)\qquad d=\begin{cases} d_1 & 0\le t<t_1\text{のとき}\\ d_2 & t_1\le t<t_2\text{のとき}\\ d_3 & t_2\le t<t_3\text{のとき}\\ d_4 & t_3\le t\le T\text{のとき}\end{cases}$$

のように与えられているとする。

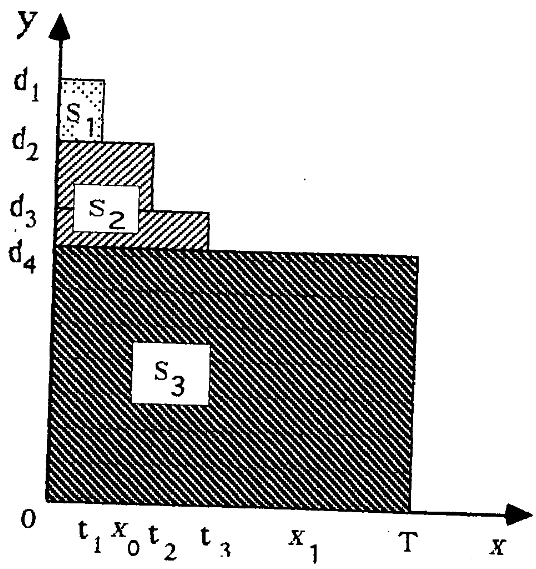

図 4

このとき図4の領域 S_1, S_2, S_3に対応する電力需要を最小発電費用でまかなうには、$t_1<x_0<t_2<t_3<x_1$よりこれらの領域をそれぞれ小型火力、大型火力、原子力によってまかなうのが最適であることがわかる。すなわちこのことは原子力

は1年間を通して深夜を含めて24時間常に運転(発電)するのが効率的であって、また小型火力は電力需要のピーク時のみ運転するのがよく、そして大型火力は1年間を通して24時間常に発電するわけではないものの、ピーク時よりはさらに長時間発電するという意味で、小型火力と原子力の中間的な運転方式を採用するのが費用最小となる最適な運転方式であることを意味している。

不確定需要の生産計画

機械Mの始動費が $a=0$、そして運転費 b が一定の場合を考えてみよう。この製品の需要は不確定であって、ある異なる2つの値 d_1, d_2 の間の任意の値を同じ確率でとる、すなわち製品の需要値は2つの値 $d_1, d_2 (0 < d_1 < d_2)$ の間に一様に分布しているとする。いま機械Mによる製品の製造量を x (kg)、そして実際に生じる製品の需要を d (kg) とする。ここで d は $0 < d_1 \leq d \leq d_2$ を満たすとする。この製品の製造量と製品の需要値とが常に一致していれば、製品を製造しただけ売ることができるため問題はないが、実際にはこの製品の需要は不確定なためにこれらは一致しない。すなわち製品の製造量が製品の需要値より大きい場合には製品が売れ残るし、また逆に製品の需要値が製品の製造量より大きい場合には製品が不足してしまう。ここで製品が売れ残った場合には売れ残り量に相当する損失が生じ、また製品に不足が生じた場合には不足量を他の代替品によってまかなわなければならないので、不足量の k 倍 $(k \geq 1)$ に相当する損失が生じると仮定しよう。この機械Mによって製品を x (kg) だけ製造した場合、製品の需要値が d (kg) と与えられたときの製品の売れ残りによる損失 Y_1 と不足による損失 Y_2 はそれぞれ次のように書くことができる。

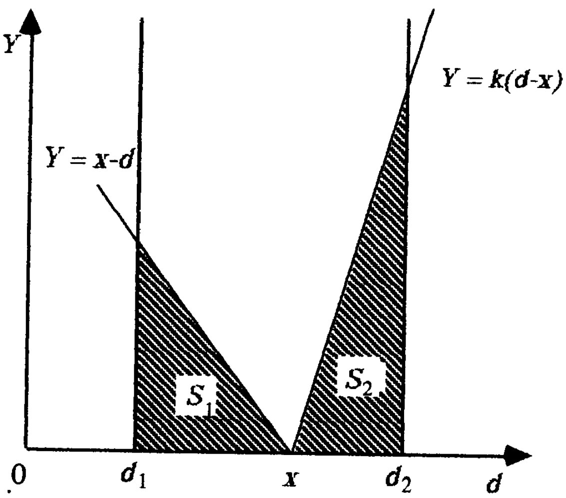

図5

(3) $$Y_1 = \begin{cases} x-d & x \geq d \text{ のとき} \\ 0 & x < d \text{ のとき} \end{cases}$$

(4) $$Y_2 = \begin{cases} k(d-x) & x \leq d \text{ のとき} \\ 0 & x > d \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで機械Mを用いて製品をどれだけ作れば損失(の期待値)が最も小さくなるかを考えてみよう。上の Y_1 と Y_2 の表現 (7), (8) をもとにすると、この製品を x (kg) だけ製造した場合、売れ残りによる損失 Y_1 の期待値 E_1 と不足による損失 Y_2 の期待値 E_2 はそれぞれ図5の斜線部分の面積 S_1, S_2 となり、これらはそれぞれ次式のように与えられる。

(5) $$S_1 = \frac{1}{2}x^2 - d_1 x + \frac{d_1^2}{2}$$

(6) $$S_2 = \frac{k}{2}x^2 - kd_2 x + \frac{kd_2^2}{2}$$

需要の不確定性に伴って発生する損失 $Y_1 + Y_2$ の期待値 $E_1 + E_2$ は図5の斜線部分の面積の和 $S_1 + S_2$ となるので、損失の期待値の和 $E_1 + E_2$ を最小にするには、図5の2つの斜線部分の面積の和 $S_1 + S_2$ を最小にすればよい。したがって

$$S_1 + S_2 = \frac{k+1}{2}(x - \frac{d_1 + kd_2}{k+1})^2 + \frac{k(d_1 - d_2)^2}{2(k+1)}$$

となるので、$S_1 + S_2$ を最小にする製品の最適製造量 x^* は

(7) $$x^* = \frac{d_1 + kd_2}{k+1}$$

のように与えられる。上の表現から x^* は図5の d 軸上の2つの点 $(d_1,0)$ と $(d_2,0)$ を結ぶ線分を $k:1$ に内分する点として得られることがわかる。さらにこの最適製造量 x^* に対しては、x^* に対応して得られる2つの斜線部分のそれぞれの面積 S_1 と S_2 の間に $\frac{S_1}{S_2} = k$ の関係があることがわかる(なぜか考えられたい)。

式(7)の表現の意味するところをいくつか考えてみよう。まずkが非常に大きいとき、すなわち製品に不足が生じた場合の不足損失費用が売れ残った場合の損失費用と比較して非常に大きい場合には最適製造量は$x^* = d_2$となる。このことは最大需要値を製造量とすることによって不足を避けるのが最適であることを意味する。一方、kが小さいとき、たとえば$k = 0$すなわち製品が不足の場合にも損失費用が生じない場合には、最適製造量は$x^* = d_1$となる。このことは製品が余分になった場合の損失費用を避けるのが最適となるため、最小需要値を製造量とするのが最適となることを意味する。またたとえば$k = 1$、すなわち製品に余分が生じた場合と不足が生じた場合のいずれの場合も"製造量と需要値の差"に相当する損失費用が生じる場合には、最適製造量は$x^* = \frac{d_1+d_2}{2}$、すなわち最小需要値と最大需要値の中間値となる。また最小需要値と最大需要値が等しい$d_1 = d_2$の場合は$d = d_1 = d_2$なる確定需要の場合に相当するので、最適製造量は$x^* = d$となり、損失費用は0となる。

おわりに

本稿では「生産計画のモデル」として工場等における最適生産計画を求める問題を取り上げ、製品の需要量の扱い方に注目してそれらが確定的な場合と不確定な場合の2種類の問題に対する解法を紹介した。「生産計画のモデル」をより一般的に「計画のモデル」とすると、ここに取り上げた以外にも非常に数多くのものが考えられる。たとえば人、物資等の輸送計画、公的(警察、学校、消防署、郵便局など)あるいは私的(工場、店舗、倉庫、銀行など)な施設配置計画、あるいはエネルギー、電力、天然資源、さらには人的資源等の資源配分計画、あるいは社会資本、公共投資、予算等の資金配分計画、あるいは企業、工場、組織等における在庫、業務、スケジュール等の管理計画など、われわれの周囲にはまさにあらゆるところに非常に多くの種類の"計画"がみられる。またわれわれは常に何らかの"計画"を作成する必要に迫られているといっても過言ではないであろう。このような"計画"をできるだけ合理的、科学的、効率的に作成しようというのが「計画のモデル」の最大かつ最重要の目的であり、また課題である。

「計画のモデル」を実践する場合に理論的裏付けを与えるのがオペレーションズ・リサーチであるといえよう。オペレーションズ・リサーチが「計画の科学」とも呼ばれるのはこの辺に由来する。本稿で取り上げた例は「計画のモデル」あるいは「計画の科学」のほんの一例にすぎないので、より詳細な理論を知りたい場合にはそれぞれの専門書を読んでいただきたい。本稿によって"計画"を合理的に作成するという考え方をたとえわずかでも伝えられれば、著者として満足であるし、また本稿の目的はほぼ達成されたといえる。今後とも多くの若い人々が「計画の科学」に興味を持ち、オペレーションズ・リサーチの発展に寄与していただけることを期待したい。