飛行機を遠くまで飛ばす話

―昔のORのテキストから―

若山　邦紘

筆者が大学生だった1960年前後の話です。筆者が通っていた工学部管理工学科にはオペレーションズ・リサーチ（ＯＲ）という授業がありました。当時出版されていた参考書の中に管理工学科の先生方が翻訳した「オペレーションズ・リサーチの数学的方法」という本がありました。トーマス・サーティというアメリカの学者が原著者です。サーティ先生は現在もご健在でピッツバーグ大学で教鞭をとっておられます。その本の最後の章にたくさんの演習問題がでていました。しかし、解答がまったくどこにも書かれていないのです。それが学生たちの挑戦意欲を刺激しました。面白い問題をみんなで解いて遊んだものです。ずいぶん徹夜をした記憶があります。自分が出した解答には自分が責任をを持つということ、そのためには理論的な裏付けが必要であることをこの本は教えてくれました。わが国のテキストで演習問題の解答がないものにどういうわけかお目にかかったことがありません。演習問題の解答がないテキストを書こうとしたことがありましたが、出版社は「独学の人もいるので」といって筆者の希望を認めてくれませんでした。世の中に出たら、解答の出ている問題なんて一つもありません。一体誰が正解を教えてくれるのでしょうか。

この本の中に次のような問題があったのです。本稿ではこの問題をめぐって話を進めたいと思います。

１．飛行機を遠くまで飛ばす問題

> 航続飛行距離がおなじ飛行機が３機ある。飛行中に互いに空中給油が可能で、そのうち１機の飛行機をできるだけ遠くまで飛行させたい。基地を飛び立ったら途中で着陸はできない。また、他の２機は基地へ戻らなくてはならない。どうすればよいか。

という問題です。この問題をはっきりさせるために、

(1)　飛行機には1,000kℓの燃料を積み込める。

(2)　燃費は１km／kℓとする。

(3)　第１号機と第２号機は基地へ戻る。

(4)　第３号機をできるだけ遠くまで飛行させる。

と仮定して考えることにしましょう。

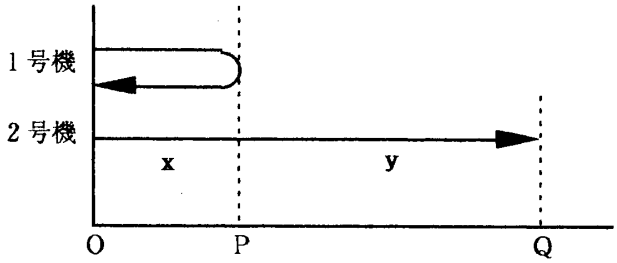
わかやま　くにひろ　法政大学工学部経営工学科

E-mail : waka@waka.is.hosei.ac.jp　Tel : 0423-87-6348

２．問題を簡単にして考えよう

この問題をそのまま考えず、だれでも分かるような単純な問題から考えてみましょう。飛行機が１機しかないときは自明です。

では２機の場合はどうでしょう。問題の状況は図－１のように表わされます。こんな絵を描くことが肝心です。燃料を余らせることは不利になりますから、燃料を1/3使ったところ。つまり1,000/3km地点で１号機から２号機に1/3給油してやれば。１号機はちょうど基地に戻れるし２号機は満タンになりあと1,000km飛行でき、合計1,333.33km飛行させることができます。



図－１　２機の場合の飛行計画

答はこれでよいのですが、あとの準備のためにこの問題を数学的に考えてみたいのです。出発する基地をO、１号機の引き返す地点をＰ、２号機の到達地点をＱとし、ＯＰ間、ＰＱ間の距離をそれぞれｘ，ｙ(km)と書くことにします。そうすると燃費の条件から、

$$2機の総飛行距離 = 3x + y \quad (km)$$

となり、これは2,000kmを超えられませんから、

$$3x + y \leqq 2,000 \qquad (1)$$

でなければなりません。また、Ｐから先は２号機だけで飛ぶのですから、どんなにがんばっても1,000km以上は飛ぶことができません。ですから、

$$y \leqq 1,000 \qquad (2)$$

という不等式を満足しなければなりません。

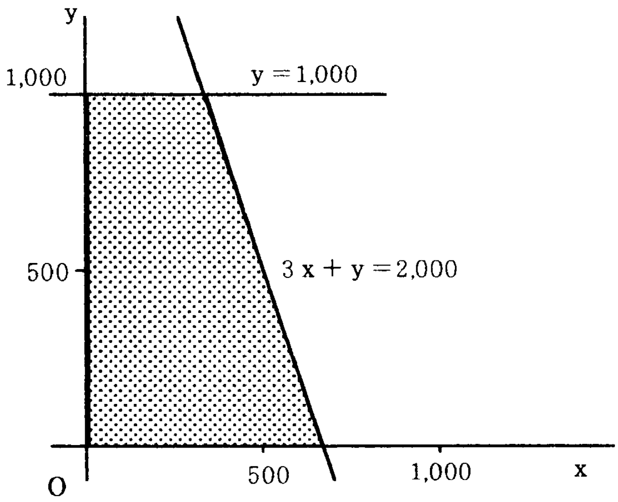
ｘとｙは距離と定義していますから、負の値をとることは意味がありません。そこで、

$$x \geqq 0 \qquad (3)$$

$$y \geqq 0 \qquad (4)$$

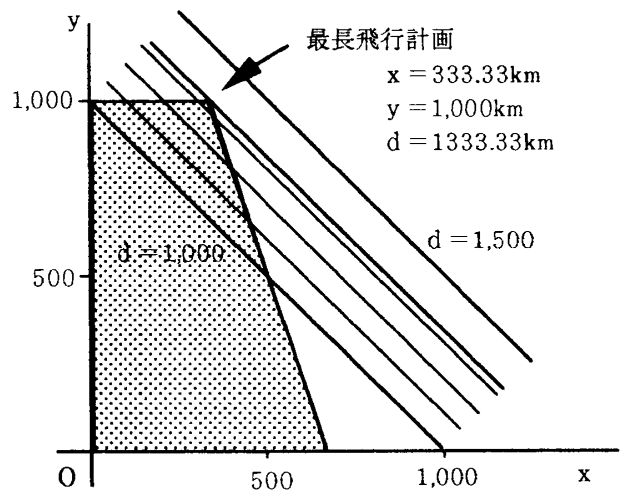
という条件を付け加えておきます。

不等式には範囲を定めるはたらきがあります。そこで



図－2　可能な飛行計画案の領域

図－2のように2次元のグラフを描き。これらの不等式で定められる範囲を眺めてみることにしましょう。4本の直線で囲まれた領域内の点（ｘ，ｙ）が実行可能な飛行計画案というわけです。この領域外の点では途中でガス欠が起きて墜落してしまうかもしれません。領域内には無限に点が存在しますから、飛行計画案は無限個考えられることになります。



図－3　最長飛行計画案

これらの案のなかで2号機の飛行距離ｄ

$$d = x + y \tag{5}$$

を最大にする案を見つける問題がわれわれの問題です。でも、案をしらみつぶしに調べる必要はありませんので安心してください。たとえば、

$$d = x + y = 1,000 \tag{6}$$

となるような案は、

$$y = 1,000 - x \tag{7}$$

という直線で表わされることになりますから、この直線をグラフ上に描いてみます。図－3のようになります。この直線の一部分は先程の可能な領域の中にあります。直線と領域の共通部分が1,000km飛ばす可能案のすべてです。もちろん2号機1機だけでも飛行可能ですが、その案もこの中に含まれています。$x=0$，$y=1,000$という解です。

ｄ＝1,500kmとすると、この直線は可能領域の外側を通ってしまうことになるので、ｄ＝1,500kmを実現する実行可能な解が存在しないことがわかります。ｄの値を1,100km, 1,200km, 1,300kmと増加させてくと、最大飛行距離を与えてくれるのは可能領域の角の点であることに気が付くでしょう。ｄを次第に増加させていったとき、その直線が領域と離れる瞬間の点が問題の答になるわけです。その点は（1,000/3, 1,000）であり、飛行距離ｄ＝1,333.33kmとなります。これ以上飛行距離を延ばす策がないことが保証されることが理解できたと思います。

このように数式とグラフを描くことによって問題が表現でき、保証付きの答が得られました。このような数式やグラフを問題のモデルとよびます。ORはこのようなモデルを作って問題を解決しようとする学問分野なのです。この問題は、

$$3x + y \leqq 2,000$$
$$y \leqq 1,000$$
$$x, y \geqq 0$$

のもとで

$$d = x + y \rightarrow \text{最大化}$$

というように書き表わします。このような問題は変数の1次式で表わされる条件のもとで同じく1次式で表わされる関数を最大化する問題で「線形計画問題」とよび、このような問題の数学的性質や解の計算法に関する理論を「線形計画法」といいます。ここでは難しい理論には立ち入りませんが、その雰囲気を味わってほしいと思います。

3．飛行機3機の場合

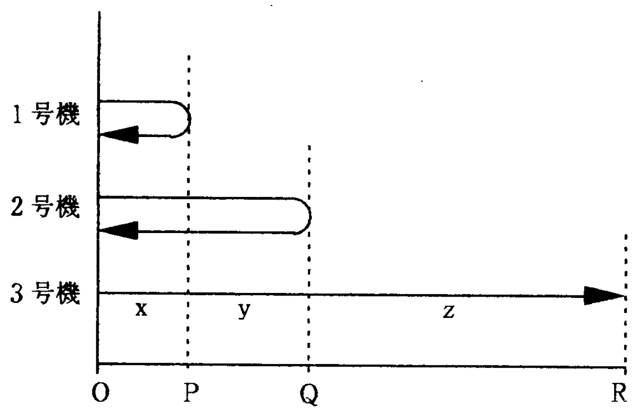
いままでの考え方を3機の場合に拡張してみましょう。さあ、モデルはどのように書き換えればよいでしょうか。まず、図－1は図－4のようになります。

各機はOを飛び立ち。第1号機はP、第2号機はQまでそれぞれ飛んで引き返し。第3号機はRまで飛ぶものとしましょう。

ｘ，ｙ，ｚは各地点間の距離をあらわすものとします。そうすると3機の飛行機の飛行可能総距離は3,000kmですから。

$$5x + 3y + z \leqq 3,000 \tag{8}$$

という不等式を満たさなくてはなりません。また。Pか



図－4　3機の場合

ら先は2機の飛行機で飛ぶわけですから。その飛行可能総距離は2,000kmです。したがって。

$3y+z \leqq 2{,}000$　　(9)

を満足しなければならず、さらにQ地点から先では残り1機だけの飛行ですから、

$z \leqq 1{,}000$　　(10)

でなくてはなりません。

x，y，zはそれぞれ先程と同様に、

$x, y, z \geqq 0$　　(11)

となります。

以上の条件に囲まれた領域は図－5の少し縦長の先細のコンクリートブロックのような形になります。

3号機の飛行距離dは、

$d=x+y+z$　　(12)

となり、上の領域内でdを最大にする点を求める問題ができあがりました。

先程と同様にdの値を増加させてゆき、これ以上増加できない点を探せばよいのですが、こんどはd＝一定という点は1枚の平面となります。この平面がdの増加にともない平行移動していきます。図－5では濃い色のより薄い色の所が飛行距離が長くなります。賢明な諸君は先回りして、可能領域のどこかの角の点でdの値が最大になると予想するかもしれません。実際、そのとおりです。角の点でdの値がどうなるかだけを計算してみればよいのです。そうすると、(8)，(9)，(10)の条件の交点、

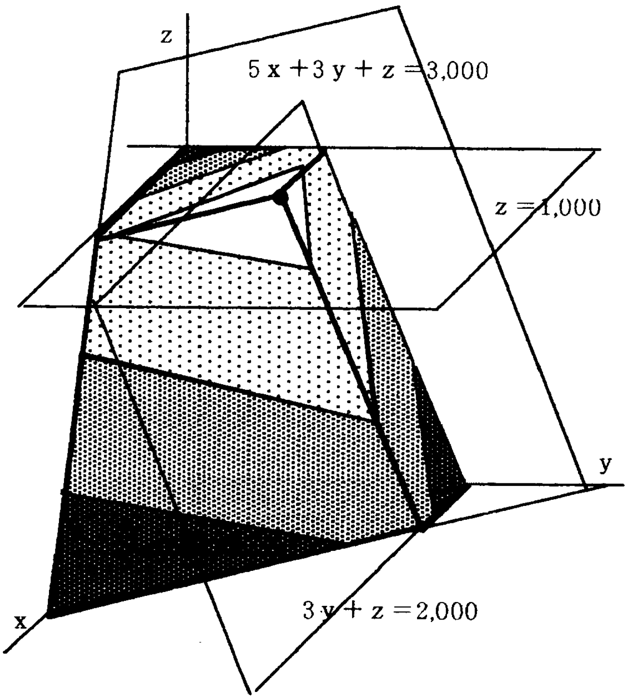
$x=1{,}000/5=200\text{km}$

$y=1{,}000/3=333.33\text{km}$

$z=1{,}000\text{km}$

で $d=1{,}533.33\text{km}$ と最大になります。

実際にこの飛行計画で飛行させてみましょう。ここからは紙と鉛筆を用意して絵を描きながら読んでください。最初の給油地点Pは200km地点です。3機とも200klの燃料が消費されています。そこで、1号機から2号機と3号機に200klずつ給油しましょう。2号機と3号機は再び満タンになりました。つぎの給油地点Qまでは2機で飛びます。ここでは燃料を1,000/3＝333.33klずつ消費しています。2号機から3号機に333.33kl給油すると、3号機はあと1,000km飛んでRまで到達することができます。2号機はここで基地に戻ろうとしますが、残りの燃料は333.33klですからPまで飛んでくることができますが、基地までは飛んでこれなくなってしまいます。ここで1号機はPでの残り燃料は400klあったずです。もし、空中でエンジンを切って2号機の帰りを待っていることができれば、200klを2号機に給油して一緒に基地に飛んで帰ることができます。これは実際には不可能でしょう。2機の場合にはうまくいったのに3機の問題では“とりあえずは失敗”といわなければなりません。とりあえずは失敗といったのは、1号機が給油後ただちに基地に戻り、再度満タンにして2号機がPに戻る時刻に迎えに行くことができるので、この距離まで3号機を飛ばすことが可能なのです。実は、1号機が基地に一旦戻ることを許せば、Pよりもう少し遠い地点まで2号機を迎えに行くことができて3号機をさらに遠くまで送り届けることができるのです。この問題は読者の課題にしておきます。これからは暗黙のうちに仮定していたように1号機が2度発ちはしないものとして話を進めます。



図－5　可能領域と飛行距離での塗り分け

なぜこのような答が出てきたのでしょう。われわれのモデルでは各区間での燃料消費と飛行距離との関係だけに注目してしまったことにあるのです。そのために帰っ

てくる飛行機を待って給油してしまったのです。戦車ならば文句はなかったのです。面白いものですね。

給油を行ったらすぐに引き返すように問題を図－4をのかわりに図－6で考え、モデルの修正を考えてみましょう。図－6では燃料タンクが3機分で飛ぶ所を、

細線＋点線＋太線

で表わし、2機分の燃料で飛ぶ所を、

点線＋太線

で、最後に1機分の燃料で飛ぶ所を、

太線

で表わしてあります。そうすると、燃料消費の条件式は以下のように書き表わせます。

$$5x+3y+z \leqq 3,000 \quad (13)$$

$$x+3y+z \leqq 2,000 \quad (14)$$

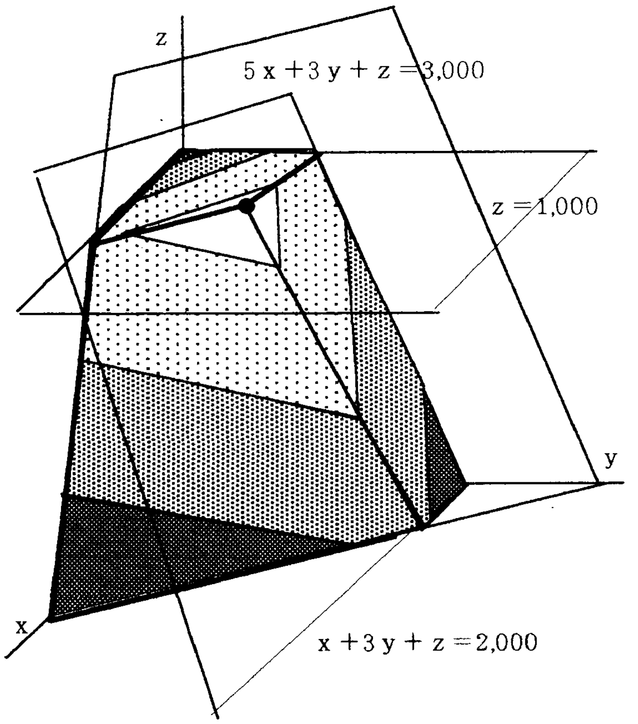
$$z \leqq 1,000 \quad (15)$$

$$x, y, z \geqq 0 \quad (16)$$

先程の条件式と違っているのは2番目の条件式（14）式の左辺にxが加わったところです。これでQから戻ってきたときに給油は受けられなくなりましたから、自分の燃料を使わなくてはならないことになりました。到達できる距離の式は前と変わらず、

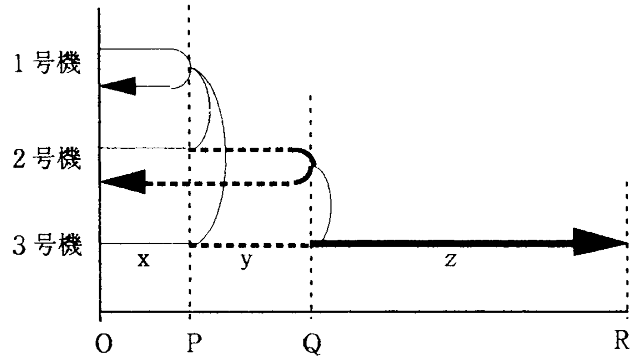
$$d=x+y+z \quad (17)$$

と表わされます。ここで、条件式が一つ変わりましたから図－5を少しだけ描き直さなくてはなりません。



図－7　可能領域と飛行距離（修正後）

1枚の条件を表わす平面が少し動きました。そのため最長飛行距離を実現する黒丸の点が少しばかりずれてし



図－6　帰りを待たない（往きだけ給油）場合

まいました。その点の座標は、

$x=250\text{km}$

$y=250\text{km}$

$z=1,000\text{km}$

となり、

$d=1,500\text{km}$

となりました。こんどは1号機が2号機の帰りを待たなくてすみます。

この解の性質を解釈するとつぎのようになります。まずは3機がOPを飛ぶ分と1号機が基地に帰る燃料を1号機の燃料でまかなってしまおうとするものです。つぎに区間PQを飛ぶ2機の燃料と2号機が基地まで帰る燃料を満タンになった2号機の燃料でまかなうものです。こうして最後の区間QRは満タンになった3号機が1,000km飛んで行くのです。つまり、先に基地に帰る飛行機の燃料をみんなで消費しながら、最後の飛行機の燃料は最後まで温存しようとするやり方が「最適なポリシー」だということになったわけです。ここまで話しが進むと、飛行機数がN台の場合についても解を求めることができるでしょう。

以前、アメリカ映画の中で「線形計画法がなかったら、アメリカ人は現在のような暮らしができないのだ」という台詞が語られていました。事実、このことは日本においてもそのまま通用する台詞であることをほとんどの日本人は知っていません。特に大学に進学して社会に役立つ学問をしようと志す若者には、数理的な思考が伝統的な工学の分野だけでなく経営や管理といった社会科学やソフト開発の問題解決に役立てられていることを知っていてほしいのです。ORは「常識の科学」ともいわれます。大学でORを学んでみようと思いませんか。

参考文献

[1] T. L. サーティ著, 山内二郎監訳, オペレーションズ・リサーチの数学的方法(下), 紀伊国屋書店

[2] 古林　隆, 線形計画法入門, 産業図書