ゲームの勝敗を確率する

高橋　幸雄

偶然現象という意味での確率の歴史はたいへん古く、人類の歴史とほぼ同じ長さをもっている。現在発掘されているもっとも古いサイコロは紀元前3000年頃のものだし、木馬で有名なトロイ戦争(紀元前1200年頃?)では、兵士の退屈しのぎに多くのゲームが考案された、という話も残っている。ただ、確率は賭博や政治と深く関わっていたため、学問の対象とするのははばかられたようで、本格的な研究が始められたのはルネサンス以降であった[1]。

確率が本格的に研究されだした頃の主な題材は賭とゲームであった。たとえば、あのガリレオは「サイコロ遊びについての考察」という本を書いて、3つのサイコロを振ったとき目の和が9となるのは25通りであることなどを示している。

ここではまず、その頃さかんに議論されたゲームの問題を紹介する。現代人の知識を持ってすればそれほど難しくはないが、確率という概念にまだ馴染んでいない当時の人たちにとっては、なかなかの難問だったようである。皆さんも、ぜひ昔の人と知恵くらべしてみていただきたい。

さらに後半で、3人の決闘問題を紹介する。だれが最終的に勝ち残るかを確率的に考えるのだが、皆さんの直感とは異なった意外な結果が得られると思う。直感と現実のギャップを大いに楽しんでいただきたい。

1.　パスカルとフェルマーの手紙

フランスの有名な数学者であるパスカル(Blaise Pascal, 1623–1662)とフェルマー(Pierre Fermat, 1601–1665)は、手紙をやりとりして確率論の研究を進めていた。これが有名なパスカルとフェルマーの往復書簡と呼ばれるもので、現在は6通だけが知られている。その中で、この2人が議論をしたのが、つぎのような問題であった。ここでは現代風にアレンジして紹介しよう。

問題1.　分配の問題

野球の日本シリーズでは、セ・リーグの優勝チームAとパ・リーグの優勝チームBが対戦して、先に4勝した方がシリーズ優勝、日本一となる。シリーズの優勝チームには、賞金Z円が与えられる。ところがある事情から、Aが2勝、Bが1勝したところで対戦を中止しなければならなくなった。ではこの賞金ZをA, Bでいくらずつ分配すればよいだろうか。

日本シリーズでは、現実にこのように途中で中止されることは考えにくいが、仮の話としてはなしを進めよう。賞金をどう分配すべきかといっても、いろいろな考え方があり得る。たとえば

1. 引き分けだから半分ずつ
2. 無勝負だからどちらにも賞金を与えない
3. 2勝1敗だから$\frac{2}{3}Z$と$\frac{1}{3}Z$
4. AとBは全く互角でそのときどきの勝敗は偶然に支配されるものと考えて、どちらかが4勝するまで続けたときの優勝確率の割合で分配

パスカルとフェルマーはこれらの中で4.がもっとも自然なものと考えて、このケースについて研究した。ただし、このころは、まだ、“確率”とか“独立”とかいう概念が明確でなかったので、彼らは「同等に確からしい」という概念に基づいて議論をしている。

それでは、皆さんも、AとBそれぞれの優勝確率を計算してみていただきたい。

[1] 確率に関する最初の書物といわれているカルダノ(Cardan, Geronimo, イタリア, 1444–1524)の本が出版されたのが1663年、後述のパスカルとフェルマーの往復書簡が1654年頃である。微積分学がニュートンとライプニッツによって始められたのが1670年頃であるから、確率論はその少し前ということになる。

たかはし　ゆきお　東京工業大学　大学院　情報理工学研究科　数理・計算科学専攻
〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1

1.1 残り試合のパターン分類

もっとも自然な計算法は、優勝が決まるまでの勝敗のパターンをすべて書き出して、その確率を計算することであろう。

$$
\mathrm{A}\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{AA} & \frac{1}{4}\\
\mathrm{BAA} & \frac{1}{8}\\
\mathrm{ABA} & \frac{1}{8}\\
\mathrm{BBAA} & \frac{1}{16}\\
\mathrm{BABA} & \frac{1}{16}\\
\mathrm{ABBA} & \frac{1}{16}
\end{array}\right.
\qquad
\mathrm{B}\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{BBB} & \frac{1}{8}\\
\mathrm{ABBB} & \frac{1}{16}\\
\mathrm{BABB} & \frac{1}{16}\\
\mathrm{BBAB} & \frac{1}{16}
\end{array}\right.
$$

$$
\text{計}\quad \frac{11}{16} \qquad\qquad \text{計}\quad \frac{5}{16}
$$

この計算から、A の優勝確率は $p_A = \frac{11}{16}$、B の優勝確率は $p_B = \frac{5}{16}$ であることがわかる。

ただし、前にも述べたように、パスカルとフェルマーが議論していたころは、確率とか独立とかいう概念が定着していなかったので、たとえば上で BAA というパターンの確率が $\frac{1}{8}$ であるということは、かならずしも自明ではなかった。

そこで、フェルマーは、優勝が決まるか決まらないかには関係なく、残り 4 試合をすべて行ったときの勝敗のパターンを列挙して、たとえばBAA のケースはBAAA と BAAB の 2 つのケースに分けて、該当する場合の数の割合で確からしさ (確率) を考えることを提案した。

$$
\mathrm{A}\left\{\begin{array}{ll}
\mathrm{AAAA} & \mathrm{AAAB}\\
\mathrm{AABA} & \mathrm{AABB}\\
\mathrm{BAAA} & \mathrm{BAAB}\\
\mathrm{ABAA} & \mathrm{ABAB}\\
\mathrm{BBAA} & \mathrm{BABA}\\
\mathrm{ABBA} &
\end{array}\right.
\qquad
\mathrm{B}\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{BBBA}\\
\mathrm{BBBB}\\
\mathrm{ABBB}\\
\mathrm{BABB}\\
\mathrm{BBAB}
\end{array}\right.
$$

こうすれば、$p_A = \frac{11}{16}, p_B = \frac{5}{16}$ であることがすぐに理解できる。

この方法にも異論がだされ、たとえばAAAA のように優勝が決まってから 2 試合する場合と BBAA など最後まで優勝が絡んだ場合とでは起こりやすさが等しいとは限らない、という意見がだされた。現在では、フェルマーの考えの方が正しいことが認められ、これをベースに確率論が組み立てられている。

1.2 パスカルの方法

パスカルが上のフェルマーの方法に先だって提案した解法は、“同様に確からしい” という事象をベースにAの受け取る賞金を求めるものであった。図 1 で、楕円の中の (i, j) は A が i 勝、B が j 勝した状況を表していて、その脇の数字は、その状態からスタートしたとき最終的に A が受け取る賞金の期待値である。

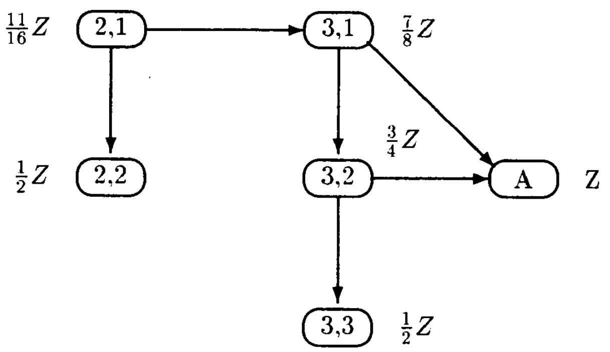

図 1: パスカルの方法

この A の受けとる賞金の期待値はつぎのように計算する。右端の A という状態は A が優勝した状態を表している。このときの A の賞金は Z である。また右下の (3,3) という状態は、A と B がともに 3 勝していて、ここから優勝する可能性は A も B もともに等しいので、A の受け取る賞金は $\frac{1}{2}Z$ である。

つぎに (3, 2) という状態で試合を中止したものとしよう。ここでつぎの試合をしたと仮定すると、状態は A か (3,3) に移るので、A は少なくとも $\frac{1}{2}Z$ の賞金はもらえる。残りの賞金 $\frac{1}{2}Z$ は A のものになるか B のものになるかわからないが、その可能性は 5 分 5 分である。したがって、A は残りの $\frac{1}{2}Z$ の半分 $\frac{1}{4}Z$ をさらに受け取り、B は $\frac{1}{4}Z$ を受け取る。結局、A は $\frac{1}{2}Z + \frac{1}{4}Z = \frac{3}{4}Z$ の賞金を受け取り、B は $\frac{1}{4}Z$ の賞金を受け取る。

この A の計算は、期待賞金 Z と $\frac{1}{2}Z$ を足して 2 で割ったことになっている。あるいは Z と $\frac{1}{2}Z$ にそれぞれ $\frac{1}{2}$ を掛けて加えたものである。このような計算を各状態について行えば、状態 (2, 1) からスタートしたときの A の獲得賞金の期待値は $\frac{11}{16}Z$ となり、A の優勝確率は $\frac{11}{16}$ であることがわかる。

この方法は簡潔でしかも説得力があり、いまみてもなかなか見事な説明である。

1.3 マルコフ連鎖

パスカルの方法は、A と B が互角のときはよいが、互角でないと (2,2) や (3,3) での賞金額が決まらず、このままでは使えない。もうひと工夫必要である。たと

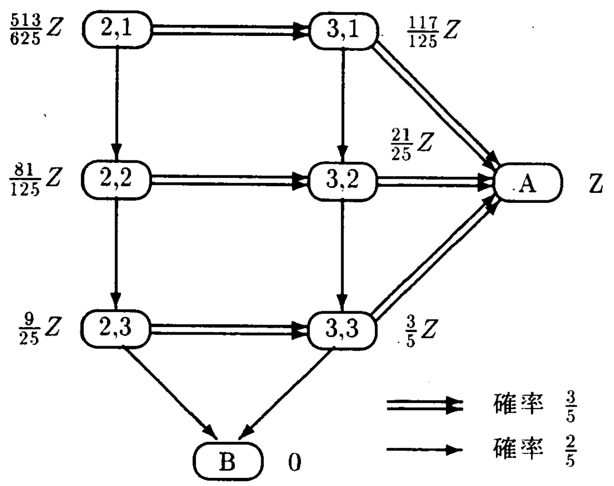

図 2: A の勝つ確率が $\frac{3}{5}$ のときのマルコフ連鎖

えば各ゲームで A が勝つ確率が $\frac{3}{5}$ のときを計算するには、図 2 のように、A ばかりでなく、B が優勝するケースまで含めて書いてやればよい。

この図で、たとえば状態 (3, 2) における期待賞金額は、つぎのゲームで A が勝てば (確率 $\frac{3}{5}$ で) 賞金は Z、B が勝てば (確率 $\frac{2}{5}$ で) 賞金は $\frac{3}{5}Z$ だから

$$1Z \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5}Z \times \frac{2}{5} = \frac{21}{25}Z$$

というように計算する。

すると、図 2 から、この場合 A が優勝する確率は $\frac{513}{625} = .8208$ と、互角のときの $\frac{11}{16} = .6875$ よりかなり高くなることがわかる。

2. 決闘の問題と“漁夫の利”

今度は“決闘の問題”という名で知られる 3 人ゲームの問題を考えよう。この問題は決闘という題材を使っているので高校生の教材としてはふさわしくないとお叱りをうけるかもしれないが、ほかの状況に作りなおすよりはもとのままのほうがわかりやすいので、あえてもとの形で紹介する。必要があれば、通常のゲームの言葉に焼きなおしてご利用いただきたい。

問題 2. 決闘の問題

A, B, C の 3 人がピストルを使って決闘する。A, B, C の命中率は、それぞれ .5, .4, .3 である。籤を引いて撃つ順番を決めたところ、A → B → C → A → ⋯ の順に、自分の選んだところを狙って撃つことになった。ただし、狙われて弾が命中した者は、その時点で決闘からはずれる。

各人が自分が勝ち残る確率 (生存確率) を最大にするよう行動したとすると、生存確率がもっとも大きいのは A, B, C のうち、誰だろうか。

ちょっと考えると、A がもっとも腕が良く、しかも最初に撃つのだから、生存確率は A が圧倒的に大きいと思われるに違いない。ところがところが、そうではないのである。結果は最後にお話しするとして、問題をきちんとモデル化してみよう。

この問題をモデル化するには、A, B, C のそれぞれが、誰を狙って撃つのが最適か、ということをまず考えなければならない。

2 人が勝ち残ったときは、当然、勝ち残った相手を狙って撃つのが最善である。3 人とも残っているときが難しい。

A が自分の番のとき B か C を狙って撃ったとすると、もしそれがあたれば、つぎは残りの 1 人から狙われる。A にとっては B に狙われるよりは C に狙われる方がよいから、このことを考えると、A は自分の番では B を狙って撃つことになる。

同様に、B も A を狙って撃つのが自分にとって最適である。では C はどうだろうか。命中率の高い A を狙うべきだろうか?

結論から先にいうと、A も B も狙わずに、そっぽを向いて撃ち、A と B のどちらかが倒れるまで待つのがよい。なぜか?

C が狙うとすると A であるが、もしあたってしまうと、つぎには B に先に狙われる。ところが A と B が撃ち合いをして一方が倒されたときには、つぎに撃てるのは C である。たとえ相手が A になろうとも、この場合、C としては先に撃った方が有利なのである[2]。

このように、A, B, C の狙う先が決まると、決闘の進行状況は後ででてくる図 4 のような状態推移図で表すことができる。この図から A, B, C の生存確率を計算して比べれば、誰の生存確率がもっとも高いかわかる。ただ、この計算は少し複雑なので、この図の説明と生存確率の計算はもう少し先に延ばして、まずは肩慣らしのつもりでもっと簡単な 2 人の決闘の問題をみておこう。

[2]厳密には、このことは数値的にきちんと調べなければならない。A, B, C の命中率が .5, .4, .3 ではなく、.9, .2, .1 というように、A の命中率が飛び抜けて高いときには、C は A を狙った方が有利となる。

$$\boxed{X} \xleftarrow{\alpha_X} \boxed{XY} \underset{\beta_Y}{\overset{\beta_X}{\rightleftarrows}} \boxed{YX} \xrightarrow[\alpha_Y]{} \boxed{Y}$$

図 3: 2人による決闘

2.1 2人の決闘

XとYの2人が決闘する場合を考える。

XとYが交互に相手を狙って撃つ。XがYを狙って撃ったときにあたる確率を α_X、はずれる確率を $\beta_X = 1 - \alpha_X$、YがXを狙って撃ったときにあたる確率を α_Y、はずれる確率を $\beta_Y = 1 - \alpha_Y$ としよう。

すると、決闘の進行状況は図3のように表すことができる。X と書かれた状態はXが勝ち残ったことを、Y と書かれた状態はYが勝ち残ったことを表している。XY と YX はまだ決着がついていない状態で、XY はつぎにXが撃つ順番、YX はつぎにYが撃つ順番であることを表している。

ここではXが勝ち残る確率を計算してみよう。これは分配の問題のときほど簡単ではない。状態 XY と状態 YX の間で行ったりきたりするため、ひとつずつ順に求めることができないからである。

状態 XY からスタートしたときに、Xが1回で命中させてしまう確率は α_X である。1回目ははずし、Yの番となったときにYもはずし、2回目にXが命中させる確率は $\beta_X \beta_Y \alpha_X$ である。同様に3回目でXが命中させる確率は $(\beta_X \beta_Y)^2 \alpha_X$ である。

このようなことをずっと繰り返していくと、状態 XY からスタートしたときにXが先に命中させる確率 p_{XY} は、無限等比級数の公式を用いて

$$\begin{aligned} p_{XY} &= \alpha_X + \beta_X \beta_Y \alpha_X + (\beta_X \beta_Y)^2 \alpha_X + \cdots \\ &= \frac{\alpha_X}{1 - \beta_X \beta_Y} \end{aligned} \tag{1}$$

となることがわかる。

図3を使うと、等比級数を使わないで方程式からこのXが勝ち残る確率を求めることもできる。変数をもう少し導入する。状態 YX からスタートしたときにXが先に命中させる確率を p_{YX}、同様に状態 X と Y からスタートしたときにXが先に命中させる確率をそれぞれ p_X, p_Y と書くことにしよう。もちろん $p_X = 1, p_Y = 0$ である。

すると、前の問題のときのように、つぎに撃ったときに命中する場合としない場合を考えると、p_{XY} と p_{YX} について、つぎのような方程式がたてられる。

$$\begin{cases} p_{XY} = \alpha_X p_X + \beta_X p_{YX} \\ p_{YX} = \alpha_Y p_Y + \beta_Y p_{XY} \end{cases} \tag{2}$$

ここで $p_X = 1, p_Y = 0$ を代入すれば、

$$\begin{cases} p_{XY} = \alpha_X + \beta_X p_{YX} \\ p_{YX} = \beta_Y p_{XY} \end{cases} \tag{3}$$

となり、この第2式を第1式に代入して整理すると

$$p_{XY} = \frac{\alpha_X}{1 - \beta_X \beta_Y} \tag{4}$$

となる。これは当然のことながら(1)と一致する。

(3)の第2式を使えば、Yが撃つ番である状態 YX からスタートしたときにXが勝ち残る確率が

$$p_{YX} = \frac{\alpha_X \beta_Y}{1 - \beta_X \beta_Y} \tag{5}$$

となることもすぐにわかる。

Yが勝ち残る確率は(4), (5)を1から引いてもよいし、XとYの役割を交換して求めてもよい。

2.2 3人の決闘： Aの生存確率

それではもう一度、3人の決闘の問題に戻ろう。

決闘の進行状況は図4のように表すことができる。ここで、たとえば、状態 CAB はA, B, Cの3人とも残っていてつぎに撃つのがCの番である状態、BC はB, Cの2人が残っていてつぎに撃つ番がBである状態を表している。A は、Aが勝ち残ったという状態である。矢印の脇の α_A とか β_B とかいうのは、そのような推移が起こる確率で、$\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$ はそれぞれA, B, Cの命中率、$\beta_A, \beta_B, \beta_C$ はそれらを1からひいたはずれの確率である。

まずAの生存確率を求めてみよう。

2人の決闘のときと同様に、たとえば ABC という状態からスタートしたとき、最終的にAが勝ち残る確率を p_{ABC} のように書くことにしよう。すると、この場合、

$$p_A = 1, \quad p_B = p_C = 0 \tag{6}$$

からはじめて、各状態からスタートしたときのAの生存確率をつぎのように順番に求めていくことができる。

AC と CA からスタートしたときのAの生存確率 p_{AC} と p_{CA} は、方程式

$$\begin{cases} p_{AC} = \alpha_A p_A + \beta_A p_{CA} \\ p_{CA} = \alpha_C p_C + \beta_C p_{AC} \end{cases} \tag{7}$$

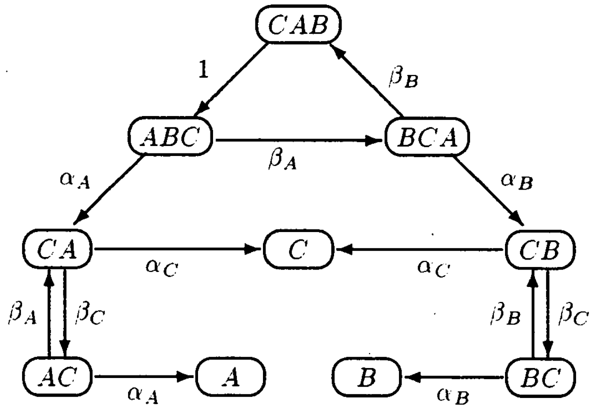

図 4: 3 人による決闘

に (6) を代入して、その連立方程式を解けば

$$p_{AC} = \frac{\alpha_A}{1-\beta_A\beta_C} \quad (8)$$

$$p_{CA} = \frac{\alpha_A\beta_C}{1-\beta_A\beta_C} \quad (9)$$

と求めることができる。

BC と CB からスタートしたときの A の生存確率は、方程式

$$\begin{cases} p_{BC} = \alpha_B p_B + \beta_B p_{CB} \\ p_{CB} = \alpha_C p_C + \beta_C p_{BC} \end{cases} \quad (10)$$

から求められるが、$p_B = p_C = 0$ だから

$$p_{BC} = p_{CB} = 0 \quad (11)$$

であることはすぐにわかる。

3 人残っているときの A の生存確率は、方程式

$$\begin{cases} p_{ABC} = \alpha_A p_{CA} + \beta_A p_{BCA} \\ p_{BCA} = \alpha_B p_{CB} + \beta_B p_{CAB} \\ p_{CAB} = 1 \cdot p_{ABC} \end{cases} \quad (12)$$

を、p_{CA} と p_{CB} を定数だと思って、p_{ABC}, p_{BCA}, p_{CAB} について解き、そのあと (9), (11) を代入すれば

$$p_{ABC} = p_{CAB} = \frac{\alpha_A}{1-\beta_A\beta_B}\,\frac{\alpha_A\beta_C}{1-\beta_A\beta_C} \quad (13)$$

$$p_{BCA} = \frac{\alpha_A\beta_B}{1-\beta_A\beta_B}\,\frac{\alpha_A\beta_C}{1-\beta_A\beta_C} \quad (14)$$

となる。

もとの問題 2 における A の生存確率を求めるには (13) に $\alpha_A = .5, \beta_A = .5, \beta_B = .6, \beta_C = .7$ を代入して計算すればよい。実際に計算してみると

$$p_{ABC} = .3846 \quad (15)$$

となる。これは予想していたほど高い確率ではない。

2.3 3 人の決闘： B の生存確率

B の生存確率を q_{ABC} などと書くことにすると、これらは上と同じ手続きを (6) の替わりに

$$q_B = 1, \quad q_A = q_C = 0 \quad (16)$$

を用いて行うことによって求めることができる。結果だけ示すと

$$q_{ABC} = q_{CAB} = \frac{\alpha_B\beta_A}{1-\beta_A\beta_B}\,\frac{\alpha_B\beta_C}{1-\beta_B\beta_C} \quad (17)$$

$$q_{BCA} = \frac{\alpha_B}{1-\beta_A\beta_B}\,\frac{\alpha_B\beta_C}{1-\beta_B\beta_C} \quad (18)$$

である。したがって、もとの問題 2 における B の生存確率は (17) から

$$q_{ABC} = .1379 \quad (19)$$

となる。これはまた、ずいぶん小さい値である。

2.4 3 人の決闘： C の生存確率

最後に C の生存確率を r_{ABC} のように書くと、これらは

$$r_C = 1, \quad r_A = r_B = 0 \quad (20)$$

からはじめて、同様にすればよいのであるが、今度の場合、0 になる項が少なく、式はかなり複雑になる。

しかし、A, B, C の生存確率の和が 1 であることを使えば、答は簡単に求められる。(15) と (19) を 1 からひくと

$$r_{ABC} = 1 - .3846 - .1379 = .4775 \quad (21)$$

これが C の生存確率である。実に 5 割近い。

C は命中率が一番低く、しかも撃つ順番が最後であるのにもかかわらず、生存確率は一番高くなる。これは A と B が互いに競い合うために、一番弱い C が得をするのである。まさに漁夫の利である。

参考文献

分配の問題については [1]、3 人の決闘問題のオリジナルについては [2] を参照いただきたい。なお、じゃんけん遊びに関係した結託の話が [3] に、また各種の確率ゲームが [4] に紹介されている。

[1] トドハンター著、安藤洋美訳 『確率論史 (パスカルからラプラスの時代まで)』, 現代数学社 (1975).

[2] マーチン・ガードナー著、金沢養訳 『新しい数学ゲームパズル』, 白楊社 (1966).

[3] 高橋幸雄：じゃんけん遊び, オペレーションズ・リサーチ, vol.28, no.9 (1983), pp.424-427.

[4] 中村義作著 『遊びの確率論』, 海鳴社 (1982).