偽金貨を探そう

松井 知己，松井 泰子

1. 偽金貨パズル

次のパズルは誰でもどこかで読んだことのあるものでしょう。

問題1　いまここに金貨が20個ある。見た目はすべてそっくりなのだが、実は1個だけ重い偽金貨が混じっている。この偽金貨を、天秤を使って見つけだしたいのだが、いったいどうやったら良いだろう。ただし天秤を使う回数はできるだけ少なくしてほしい。

さて答は？ここで、「やり方は解らないけど、答は3回」と即答できる方はこの記事を読む必要はありません。次の記事に進んでください。

この手の問題が書いてある多くのパズルの本では、答は3回と書いてあり、そのやり方も示されているのですが、3回が最小回数なのでしょうか？この手数の最小性について書かれているパズル本には、残念ながら私はお目にかかった事がありません。そのため、私はずっと消化不良状態を起こし続けていました。そして大学に入って初めてこの問題に回答することができるようになったのです（もしかしたら普通より遅いのかもしれない）。「この答は3回が最小なのです。そしてこの事実は非常に重要な問題を含んでいるのです。」

さて、なぜ3回必要なのでしょう？天秤を1回使うと、「右が重い」、「つりあう」、「左が重い」の3通りの答があります。天秤を2回使うと、1回目の結果が3通りあり、2回目の結果が3通りあり、全体で9通りの結果があります。すなわちある計り方をした結果、9通りの答を返すことができます。では今の問題について考えてみましょう。20個の金貨のうちどれか1つだけ、重い偽金貨が混じっているのですから、答は「1番目の金貨が重い」，「2番目の金貨が重い」，…，「20番目の金貨が重い」の20通りあるはずです。そう、すなわち2回天秤を使っただけでは9通りの答しかできないのですから、20通りの答が存在する上の問題に答えることは不可能なのです。ちなみに3回天秤を使うと、$3\times3\times3=27$通りの答が可能であり、20通りより多いので、答が可能となりそうです。興味のある人は実際の手順を考えてみて下さい。

まつい ともみ 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻
〒133 東京都文京区本郷 7-3-1
e-mail: tomomi@misojiro.t.u-tokyo.ac.jp
まつい やすこ 東京都立大学理学部数学教室
〒192-03 東京都八王子市南大沢 1-1
e-mail: yasuko@math.metro-u.ac.jp

2. 金貨を増やすと…？

3回天秤を使うと27通りの答が可能なのですから、問題1で金貨を27個まで増やしても良さそうですね。実際その通りです。27個の金貨の中から1つだけ重い偽金貨を3回の天秤で見つけ出すことができます。ではその手順を考えてみましょうか！というと「そういう面倒なパズルは嫌いだ！」とばかり、うんざりしてこの先を読むのをやめててしまう人もいるでしょう。ちょっと待って下さい。実際の手順を考えるには、非常に重要な「コツ」があるのです。もう一度先ほどの議論に戻ってみましょう。答は27個の金貨のうちどれかであり、3回天秤を使うことによって27通りのパターンがあるのですから、この数はぴったり一致しています。すなわち無駄は絶対に許されないのです。1回目に天秤を使うことによって、答は3通りありました。1回目の天秤を使った時の答がなんであろうと、その後もう2回しか天秤は使えないのですから、場合は9通りしか残っていません。ということは、1回目に天秤を使って「右が重い」場合も「つりあう」場合も「左が重い」場合でも、それぞれの場合にどの金貨が重いか9個に絞られる必要がありそうです。とすると、1回目の天秤がたまたま「つりあった」場合は1回目に天秤にのせなかった金貨の中に偽金貨が混じっているはずですから、天秤にのせない金貨は9個でなければなりません。なるほど！ということは、1回目は天秤の右に9個の金貨をのせ、左にも9個の金

貨をのせるしかないわけです（正確にいうならば、もし3回でできるとするならば、これしかないわけです）。

もし1回目で「つりあった」ならば、偽金貨は残りの9個の中にあります。1回目の天秤で「右（左）が重かった」ならば、偽金貨は右（左）にのせた9個の中にあるわけです。ではこの9個の中からどうやって偽金貨を見つけるのでしょう。この時も前と同様に、9個のうちの3個を天秤の右に、3個を左にのせます。もしこの2回目が「つりあった」ならば、偽金貨は残りの3個の中にあります。2回目の天秤で「右（左）が重かった」ならば、やはり偽金貨は右（左）にのせた3個の中にあります。最後も同様に、3個のうちの1個を天秤の右に、もう1個を左にのせます。天秤のどちらかが下がれば、そちらが偽金貨、つりあえば最後の1個が偽金貨となるわけです。

なるほど！毎回天秤を使う毎に、偽金貨の候補が1/3になっていくのですね。だから、3回天秤を使えば27個の候補が $27 \times (1/3) \times (1/3) \times (1/3) = 1$ 個に絞られる訳です。ということわぁ …、81個の金貨だったら4回で、243個の金貨だったら5回で解くことができ、これより少ない手数は存在しない訳ですね。

3.　全部本物？

次はもうちょっと面倒なパズルを紹介しましょう。

> 問題2　いまここに金貨が13個ある。見た目はすべてそっくりなのだが、実は1個だけ重さの違う偽金貨が混じっている可能性がある。さて天秤を3回だけ使って、「偽金貨が混じっていない」のか、あるいは「偽金貨を見つけ出し」、それが「重い」のか「軽い」のかを答えて欲しい。さてこれは可能だろうか？

天秤を使える回数は3回だから、答の通り数は27通りまで可能ですね。では問題2の答の通り数は何通りあるでしょう。「すべて本物」、「1番目が重い」、「2番目が重い」、…、「13番目が重い」、「1番目が軽い」、…、「13番目が軽い」とちゃんと27通りです。そっか、じゃ大丈夫だ！とは言えません。ここで分かるのは、天秤を最低3回は使わなければならないということです。では本当に3回でできるのでしょうか？実は答は　NO　です。1回目の天秤で両側にk個づつ金貨をのせたとしましょう。「右が重かった」ならば答の可能性は、「右のk個の中に重い偽金貨があるか、左のk個の中に軽い偽金貨がある」ことがわかります。「左が重かった」ならば答の可能性は、「左のk個の中に重い偽金貨があるか、右のk個の中に軽い偽金貨がある」ことがわかります。そして「つりあった」ならば、「残りの$13-2k$個の中に（重いまたは軽い）偽金貨があるか、すべて本物」となります。先の議論と同じように、3回の天秤を使った結果のパターンが27通りで、答の種類数も27通りですから無駄は許されません。すなわち、1回目が終わった時点で答の可能性が9通りに絞られなければならないのです。もし「右（左）が重かった」ならば答は$2k$通りに絞られ、「つりあった」ならば答は$2(13-2k)+1$通りに絞られます。ちなみにこれらを全て加えると、$2k+2k+2(13-2k)+1=27$通りになっていますね。さてどの場合でも答が9通りに絞られなければならないのですから、$2k \leq 9$ かつ $2(13-2k)+1 \leq 9$ が成り立たなければならないのですが、これは成り立ちません。なぜならば、2式を整理すると、$k=4.5$ が導かれますが、kは金貨の個数なので整数でなければならないからです。

ということで、問題2は「できない」が答なのです。ちなみに問題2において、本物の金貨と同じ重さであることが分かっているおもりが1つあれば、天秤を3回使用するだけで質問に答えることができます。興味のある方はチャレンジしてみて下さい。手順を見つけるコツは、先ほど言ったものと同じです（本文の最後に簡単なヒントを付け加えておきましょう。）

4.　軽い順に並べよう

さて次はこんな問題を考えてみましょう。

> 問題3　いまここに金貨が10個ある。見た目はすべてそっくりなのだが、実はみな重さがすこしずつ違う。これを重さの軽い順に並べるには、天秤を何回使う必要があるか？

どうやって解きますか？とても簡単な方法をお教えしましょう。まず最初に一番軽い金貨を見つけます。これには天秤を9回使えば可能です（さてどうやるのでしょう？）。次にこの1番軽い金貨を取り除いて、残りの9個の中で最も軽い金貨を見つけます。これは天秤を8回使えば可能です。そしてまた取り除いて、以下同じように見つけます。さて天秤は何回使ったのでしょうか？$9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$回ですね。では問題3をもうちょっと一般化してk個の金貨があったとして考えてみましょう。すると上記の方法で天秤を使う回数は$(k-1)+(k-2)+\cdots+1=k(k-1)/2$回となりますね。

さてこれは最小手数でしょうか？そこで、最低でも何回かかるのか見積もってみましょう。考え方は前と同じものです。すなわち、答の通り数はいったい何通りでしょうか？10個の金貨にはaからjまでの名前がついているとすると、答えはaからjまでの名前を1列に並べることに対応します。最初に名前をつけた時は重さについてどう並んでいるか分からないのですから、答の通り数はaからjの金貨を1列に並べる順列の数だけ存在するわけです。10個のものを並べる順列の数は $10! = 3,628,800$ ですね（ずいぶん大きいな）。では天秤を何回使えばいいでしょう？3回使えば $3 \times 3 \times 3 = 27$ の場合があり、4回使えば $3^4 = 81$、だから…13回使えば $3^{13} = 1,594,323$、14回では $3^{14} = 4,782,969$ となって、どうも14回は必要なようです（なんだ割と少ないや）。先ほどの方法では45回でしたから、ずいぶん違いますね。もしかすると、もっと減らせるのかもしれません。

ではこの議論も一般化して、k 個の金貨がある時の問題3を考えてみましょう。すると答の通り数は $k!$ ありますね。天秤を p 回使うと 3^p の場合があります。ということは $k! \leq 3^p$ が成り立たなければならないので、$\log_3(k!) \leq p$ となります。すなわち $\log_3(k!)$ 回ぐらい天秤を使わないといけないようです。

> でもこの議論はあまりフェアではありません。だって金貨の重さが本当にばらばらだったら、天秤の左右にどのように金貨をのせても「つりあう」ことなどありっこないのですから。「つりあう」ことがないならば、天秤を1回使う毎に「右が重い」か「左が重い」のどちらの場合が成り立ちます。ゆえに天秤を2回使えば4つの場合が存在し、3回使えば8つの場合が存在し、$\cdots$、天秤を21回使えば場合は $2^{21} = 2,097,152$、22回使えば $2^{22} = 4,194,303$ の場合が存在します。$10! = 3,628,800$ だったから、天秤を使う回数は22回くらいは必要かしら。

実は天秤を25回使うだけで問題3を解く、驚くべき方法があります（併合整列法と呼ばれる方法です）。それには、まず10個の金貨を5個ずつ二つのグループに分けます。そして「なんらかの」方法で二つのグループの金貨を軽い順に並べます（この方法は後で述べます）。さて第1グループの金貨の中で最も軽いものと、第2グループの金貨の中で最も軽いものを天秤にのせます。このとき軽い方が、全体の中で最も軽い金貨となることは分かりますね。例えば第1グループの（中で最も軽い）金貨が「全体で最も軽い金貨」だと分かったとしましょう。そうしたら、その金貨を第1グループから取り除き、机の上にでも置いておきます。そしてまた、第1グループの金貨の中で最も軽いものと、第2グループの金貨の中で最も軽いものを天秤にのせます。このときの軽い方の金貨が「全体で2番目に軽い金貨」になります。この「全体で2番目に軽い金貨」をその所属するグループから取り除き、先ほどの「全体で1番軽い金貨」の隣に置いておきます。以下同様の手続きを行ない、どちらかのグループの金貨がなくなるまで続けます。例えば第1グループの金貨が無くなったら、残った第2グループ中の金貨はそれまでに取り除いた金貨のどれよりも重く、またこれらの金貨は既に軽い順にならんでいます。ですから、残った金貨を先ほど取り除いて机に並べた金貨の後ろに続けて並べれば終わりです。いまの手続きでは、1回天秤を使うたびに1個の金貨が取り除かれますから、最悪でも9回天秤を使えば、金貨は1個になって手続きは終了します。では、2つのグループの5個の金貨はどうやって軽い順に並べるのでしょう？これも同様の方法で行ないます。すなわち、金貨2個からなる第1グループと金貨3個からなる第2グループに分け、それぞれのグループの金貨を「何らか」の方法で軽い順に並べます。そうしたら、2つのグループの最も軽い金貨同士を天秤で比べ、軽い方を取り除き…（以下続く）。この手続きは、最悪でも天秤を4回使えば終了します。では3個の金貨を軽い順に並べるには？これは3回天秤を使えばできますね。2個の金貨でしたら1回天秤を使えばできます。さて全体で何回天秤を使ったでしょう？5個の金貨からなる2つのグループから10個全体を並べるのに9回。2個と3個の金貨からなるグループから5個全体を並べるのに4回、ただし5個のグループは2つあります。3個の金貨を並べるのに3回、ただし3個のグループは2つあります。2個の金貨を並べるのに1回、ただし2個のグループも2つあります。全体で $9 + 4 \times 2 + 3 \times 2 + 1 \times 2 = 25$ 回というわけです（25回という数字は最悪のケースで、もっと早く終わるときもあります）。

ではこの手順も、ちょっと一般化して、k 個の金貨がある時の問題3を考えてみましょう。といっても手順が大分複雑ですから、kが2のべき乗の時だけ考えてみましょう。例えば金貨の数が $k = 2^4 = 16$ 個ならば、次のようになります。8個と8個に分けたのをまとめるの

に天秤を15回使う。4個と4個に分けたのをまとめるのに7回、これが2つ。2個と2個に分けたのをまとめるのに3回、これが4つ。2個のものを並べるのに1回、これが8つ。合計で、$15+7\times2+3\times4+1\times8=49$ 回になります。もし $k=2^n$ ならば、

$$\begin{aligned}&(2^n-1)+(2^{n-1}-1)\times2+(2^{n-2}-1)\times2^2\\&\quad+\cdots+1\times2^{n-1}\\&=\ (n-1)2^n+1=(\log_2 k-1)k+1\end{aligned}$$

となります。少し面倒な計算をすると、

$$(\log_2 k-1)k+1\le 2\log_3(k!)$$

であることが分かります。すなわち上記の手順は、最小手数を見積もった値の高々2倍程度であることがわかります（上記の「つりあう」が無い状況でしたら、最小手数の見積もりは $\log_2(k!)$ となり、

$$(\log_2 k-1)k+1\le 1.2\log_2(k!)$$

が成り立ちます）。まあ、2倍程度なら良いのではないでしょうか。なぜって、最初の $k(k-1)/2$ の手続きはとてつもなく多過ぎましたから。以下にちょっと、その違いを記しておきましょう。

k	$\log_3(k!)$	$\log_2(k!)$	α	$k(k-1)/2$
4	2.9	4.6	5	6
8	9.7	15.3	17	28
16	27.9	44.3	49	120
32	74.2	117.7	129	496
64	186.8	296.0	321	2016
128	451.8	716.2	769	8128

注）ただし、$\alpha=(\log_2 k-1)k+1$。
表中の数値は小数点以下第1桁までです。

5. おわりに

金貨のパズルにおいて天秤を何回使うのか？という問題を考えて来ましたが、これは計算機の話と密接に関わっています。例えば上記の問題を計算機に解かせようとしたとき、計算機では2つの数字の大小を比べることができますが、これは天秤で重さを比べることに他なりません。そしてどんな計算機でも、数字の大小比較を3回より少ない回数行なうだけで問題1を解くことはできないのです。同様に、問題2を3回の大小比較だけで解くことはできません。そして最後の問題3では、大小比較を $\log_3(k!)$ より少ない回数で、軽い順に並べることはできないのです。（ただし、本稿に記した問題1や問題2を解く算法を計算機上で実行する際は、「天秤にのせる金貨の重さを加え合わせる」等の計算の時間が必要ですから、実際の計算時間がもっと速い「計算機上の算法」は他に存在するかもしれません。）たとえその計算機が、マッキントッシュであろうとＩＢＭであろうとNECであろうとこれは絶対の事実なのです。また未来においてどんな速い計算機が出現しても、これは変わることの無い事実なのです（この事実を越えるためには、計算機の概念が、あるいは「計算」の概念そのものが変わるしか無いのです）。

そもそも問題1のパズルは、第2次世界大戦の頃ロシアの数学者の間で流行したという話があります（真偽の程は私は知りません）。計算機が本格的に出現したのが、第2次世界大戦において弾道計算をするためであったことを考えると、上記のパズルのような問題の重要性が認識されはじめた時期と丁度一致しているのは事実ですね。

宿題パズルのヒント

天秤を1回目に使う時、右に金貨を k 個のせ、左に金貨 $k-1$ 個とおもりを1個のせたとしましょう。「右が重い」、「つりあう」、「左が重い」のどの場合でも答の候補は9通りに絞られなければなりません。まず「右が重かった」場合を考えましょう。すると可能性のある答は「右の k 個の金貨の中に本物より重い偽金貨があるか、左の $k-1$ 個の中に本物より軽い偽金貨がある」となることがわかります。すなわち答は $k+(k-1)=2k-1$ 通りに絞られます。すると $2k-1=9$ が成り立たなければならないので、$k=5$ でなければなりません。すなわち右に金貨を5個のせ、左に金貨4個とおもりをのせるのが正しいようです。

ちなみに、残りの状況もチェックしておきましょう。1回目の天秤で「左が重かった」ならば、「左の4個の金貨の中に本物より重い偽金貨があるか、右の5個の金貨の中に本物より軽い偽金貨がある」の9通りに絞られます。また1回目の天秤で「つりあった」ならば、「天秤にのせなかった4個の金貨の中に軽いあるいは重い偽金貨が含まれているか、金貨はすべて本物」という答に絞られます。この場合も答はちゃんと $4+4+1=9$ 通りに絞られていますね。

では2回目以降の天秤の使い方を考えてくださいね。