Equivalent Differentiable Unconstrained Optimization for Complementarity Problems

山下 信雄
(奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科 現所属：同大学情報科学研究科博士後期課程)
指導教官 福島雅夫教授

1. はじめに

非線形相補性問題(**NCP**)は，交通量割り当て問題や経済の均衡問題，最適化問題などを定式化するために使われる問題で次のように定義される [1].

[NCP] Find $x \in R^n$ such that

$$x \geq 0,\ F(x) \geq 0,\ x^T F(x) = 0.$$

ここで，Fは$R^n \to R^n$の関数である．最近，Mangasarian と Solodov[3] はこの問題と等価な次の制約のない最小化問題を提案した．

$$\min_x M_\alpha(x)$$

ここで，M_αは次式で定義される実数値関数である．

$$\begin{aligned} M_\alpha(x) &= x^T F(x) + \frac{1}{2\alpha}(\|(-\alpha F(x) + x)_+\|^2 \\ &\quad -\|x\|^2 + \|(-\alpha x + F(x))_+\|^2 \\ &\quad -\|F(x)\|^2) \end{aligned}$$

ただし$\alpha \in (1, \infty)$はパラメータであり，$\|\cdot\|$はユークリッド・ノルム，$(x)_+$は第i成分を$\max(0, x_i)$とするベクトルを表す．この関数M_αを**陰ラグランジュ関数** (implicit Lagrangian) と呼ぶ．この関数については，次の性質がわかっている．

定理 1 *[3]* すべてのxに対して$M_\alpha(x)$は非負であり，$M_\alpha(x) = 0$とxが*NCP*の解であることは同値である．

この定理は，NCP に解が存在するとき，M_αの大域的最適解が NCP の解となることを示している．

Mangasarian ら [3] は陰ラグランジュ関数に対して，次の未解決問題を提示している．

- どのような仮定のもとで，$M_\alpha(x)$ の停留点が NCP の解になるか？

現在提案されているほとんどの最適化のアルゴリズムは，目的関数の停留点を求めるものであるので，$M_\alpha(x)$の停留点がNCP の解となるための条件をみつけることは重要である．本論文では，この問題に対する１つの結果が得られたので，それについて報告する．

次に非線形相補性問題を一般化した相補性問題に対する陰ラグランジュ関数を提案し，その性質を調べる．特に，その陰ラグランジュ関数の停留点が，一般非線形相補性問題の解となるための条件を調べる．また，非線形相補性問題に対する陰ラグランジュ関数の制約なし最小化問題に対する降下法を提案し，その大域的収束性を示す．最後に，計算機実験の結果を報告する．

なお，本修士論文の結果は論文 [4], [5] に含まれている．

2. 未解決問題に対する１つの解答

関数$G, H : R^n \to R^n$を次式で定義する．

$$\begin{aligned} G(x) &= (-\alpha F(x) + x)_+ - x \\ H(x) &= (-\alpha x + F(x))_+ - F(x) \end{aligned}$$

この関数G, Hを用いると$M_\alpha(x)$の勾配は次式で表される．

$$\begin{aligned} \alpha \nabla M_\alpha(x) &= \nabla F(x)^T(-\alpha G(x) + H(x)) \\ &\quad +(G(x) - \alpha H(x)) \end{aligned}$$

また，GとHには次の興味深い性質が成り立つ．

補題 1 $F(x)$が微分可能かつ$\nabla F(x)$が正則であり，xが関数M_αの停留点のとき，次の３つの条件は同値である．

1) $-\alpha G(x) + H(x) = 0$
2) $G(x) - \alpha H(x) = 0$
3) $G(x) = 0, H(x) = 0$ □

次の定理は，陰ラグランジュ関数 M_αの停留点がNCP の解になるための十分条件を与えている．

定理 2 $\nabla F(x)$ が正定値ならば，$M_\alpha(x)$ の停留点は*NCP*の解である． □

3. 一般非線形相補性問題

次に NCP を拡張した次の一般非線形相補性問題 (**GNCP**) を考える.

[GNCP] Find $x \in R^n$ such that

$$E(x) \geq 0,\ F(x) \geq 0,\ E(x)^T F(x) = 0$$

ここで, E, Fは$R^n \to R^n$の写像である.

GNCP に対して, M_αを一般化した関数を用いた次の最小化問題を提案する.

$$\min \hat{M}_\alpha(x)$$

ここで,

$$\hat{M}_\alpha(x) = E(x)^T F(x) + \frac{1}{2\alpha}\left(\|(E(x) - \alpha F(x))_+\|^2 - \|E(x)\|^2 + \|(F(x) - \alpha E(x))_+\|^2 - \|F(x)\|^2\right)$$

である. この$\hat{M}_\alpha$に対して, 次のことを示した.

- $\hat{M}_\alpha(x)$ は非負である. また, $\hat{M}_\alpha(x) = 0$ となることと, x が GNCP の解であることと同値である. すなわち, $\hat{M}_\alpha$の最小化問題が GNCP と等価である.

- $\alpha \neq 1$ で, $\nabla E(x), \nabla F(x)$ が正則とする. このとき, 次の条件 (a), (b), (c) を満たす $n \times n$ 行列 $S(x), T(x)$ と $k, l \in R$が存在すれば$\hat{M}_\alpha(x)$ の停留点はGNCP の解である.

  (a) $S(x)\nabla E(x)^T$が正定値.

  (b) $T(x)\nabla F(x)^T$が正定値.

  (c) $k + l > 0, kl \geq 0$ かつ, $kS(x)\nabla F(x)^T + l(T(x)\nabla E(x)^T)^T$ が正定値対角行列.

4. 降下法

陰ラグランジュ関数M_αを最小化する次のアルゴリズムを提案する. このアルゴリズムでは, 探索方向を求めるために$\nabla F(x)$ を計算する必要はない.

降下法のアルゴリズム

ステップ 0:初期点x^0を適当に選び$k := 0$とする.

ステップ 1:次式により点x^{k+1}を定める.

$$x^{k+1} := x^k + t_k d_k$$

ここで, $d^k = \alpha G(x^k) - H(x^k) + \rho(\alpha H(x^k) - G(x^k))$ であり, t_kはArmijoの方法で求められるステップサイズである. なお, ρは十分小さい正の定数とする.

ステップ 2: 収束判定条件を満たせば終了し, そうでなければ$k := k + 1$としてステップ 1へ.

このアルゴリズムに対して以下の収束定理がなりたつ.

定理 3 Fが強単調のとき上記のアルゴリズムは収束し, $\{x^k\}$ の任意の集積点はNCPの解である. □

5. 数値実験

陰ラグランジュ関数M_αの性質を実際に確かめるために数値実験をおこなった. 実験では, Kanzow [2] が提案している非線形相補性問題と等価な制約なし最小化問題を構成する関数との比較をおこなった. 関数の最小化のアルゴリズムとしては, パッケージソフトNPSOL 4.0の準ニュートン法と4節で提案した降下法を用いた. いくつかの代表的なテスト問題に対しておこなった実験において, $\nabla F(x)$ が正定値である問題においては, きわめて良好な結果を得ることができた.

参考文献

[1] Harker, P. T. and Pang, J. -S., *Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problem: A Survey of Theory, Algorithms and Applications*, Mathematical Programming, **48** (1990), 161–220.

[2] Kanzow, C., *Nonlinear Complementarity as Unconstrained Optimization*, Preprint 67, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hamburg, Hamburg, Germany, 1993.

[3] Mangasarian, O. L. and Solodov, M. V., *Nonlinear Complementarity as Unconstrained and Constrained Minimization*, Mathematical Programming, **62** (1993), 877–898.

[4] Tseng, P., Yamashita, N., and Fukushima, M., *Equivalence of complementarity problems to differentiable minimization: A unified approach*, to appear in *SIAM Journal on Optimization*.

[5] Yamashita, N. and Fukushima, M., *On stationary points of the implicit Lagrangian for nonlinear complementarity problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **84**, (1995), 653–663.