Efficient Algorithms for Location Problems on Tree Networks

塩浦　昭義

（東京工業大学大学院理工学研究科情報科専攻　現所属：同大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻博士後期課程）
指導教官　小島政和教授

1. はじめに

与えられたネットワークに対し，ネットワークの中心から近く又は遠くに，“施設”と呼ばれるある種の部分グラフを配置する問題を施設配置問題という．例えば，市役所，警察署等の施設の最適な配置や，新規バス路線や道路拡張工事の位置の決定などの問題は施設配置問題として扱うことが出来る．この問題は1964年のHakimi[1]による研究をはじめとして，理論と応用の両面から数多くの研究がなされている．施設として部分木あるいは道を配置する問題に対してはMinieka[3]，及びHakimi et al.[2]が包括的な研究を行なっている．彼らは一般のネットワーク及び木構造ネットワークでの数多くの施設配置問題に対し，多項式時間計算可能性やNP-困難性の証明を示したが，問題を解くための計算時間については詳しく述べていなかった．一方，木構造ネットワークはいくつかの有用な性質を持ち，効率的な算法の構築が可能となる．

本研究では木構造ネットワークでの様々な施設配置問題の構造を解析し，最適解に関する性質を導いた．また，これらの性質を用いて各問題に対し効率的な算法を示すとともに，算法の構築を通して各問題の難しさを評価した．ほとんどの問題に対し，線形時間算法を提案した．また，部分木を配置するいくつかの問題はナップサック型問題と対応付けられ，その両者の関係についても詳しく議論した．

2. 施設配置問題

頂点集合 V，無向枝の集合 E からなる木構造ネットワークを $T=(V,E)$ とする．T はEuclid平面上に描かれているものと仮定する．各枝 $(u,v)\in E$ は互いに交わることなく線分で描かれており，長さ $l(u,v)$ を持つものとする．今後，T は平面上の点の集合と見なす．ある枝上の2点 p,q に対し，p と q を結ぶ線分を $[p,q]$ と表し，**部分枝**と呼ぶ．2点 p,q がそれぞれ，ある枝の両端の頂点上に位置するとき，部分枝 $[p,q]$ は**完全枝**と呼ばれる．部分枝 $[p,q]$ の長さを $l(p,q)$ と表す．

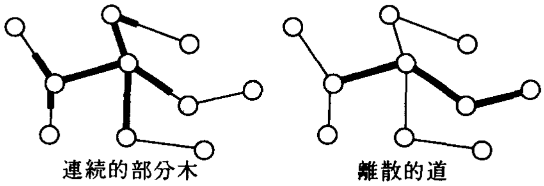

図1：連続的部分木と離散的道．太線により表される．

T の部分枝の集合を**連続的部分グラフ**と呼ぶ．特に連続的部分グラフが完全枝のみを含む時，普通の意味での部分グラフとなるが，これを**離散的部分グラフ**とする．連結な連続的部分グラフを**部分木**と呼ぶ．葉の数が高々2個の部分木を特に**道**と呼ぶ（図1参照）．

木 T での2点 $p,q\in T$ の**距離**を，p と q を結ぶ一意的な道の長さにより定義し，$d(p,q)$ と表す．点 p と部分木 S の距離は $d(p,S)=\min\{d(p,q):q\in S\}$ と定める．**部分木 S の大きさ** $\mathrm{size}(S)$ は S に含まれる部分枝の長さの和とする．

配置する施設 S がどの程度 T の中心に位置するかを測る尺度として，次の2つを用いる．

最遠距離:　$\mathrm{ecc}(S)=\max\{d(w,S):w\in V\}$,

距離和:　$\mathrm{dis}(S)=\sum\{d(w,S):w\in V\}$.

表1に示されるように，本研究ではそれぞれ4種類の配置の目的と配置する施設を取り上げ，これらの全ての組み合せから生ずる16種類の施設配置問題を扱う．各問題には，配置する施設の大きさの制約を設け，目的が最小化のときは上限 L を，最大化のときは下限 L を与える．

3. 最遠距離最小化・離散的部分木問題に対する結果

特に興味深い結果の得られた，最遠距離最小化・離散的部分木問題に対する結果を説明する．この問題は次のように定式化される．

$$\mathrm{TL1}\quad\left|\begin{array}{ll}\text{Min.} & \mathrm{ecc}(S)\\ \text{s.t.} & \mathrm{size}(S)\le L,\\ & S\text{ は }T\text{ の離散的部分木.}\end{array}\right.$$

最小な最遠距離をもつ頂点を r とする.

補題 1. TL1 の最適解で r を含むものが存在する. ■

この補題より, r を含む離散的部分木のみを考えればよい. 各完全枝 $[u,v] \in E$ $(d(r,u) < d(r,v))$ に対し,

$$a(u,v) = \max\{d(u,w) : u \text{ と } w \text{を結ぶ道は } v \text{を含む}\}$$

とおく.

補題 2. 頂点 r を含む任意の離散的な部分木 S に対し, $S \neq T$ ならば次の関係が成り立つ.

$$\mathrm{ecc}(S) = \max\{a(u,v) : [u,v] \in E \setminus E(S)\}. \quad ■$$

0-1 変数 $x(u,v)$ $([u,v] \in E)$ に対し, $S(\boldsymbol{x})$ を枝集合 $\{[u,v] : [u,v] \in E, x(u,v) = 1\}$ からなる離散的部分グラフとする. $\bar{L} = \sum\{l(u,v) : [u,v] \in E\} - L$ とおくと, 次の等価な問題 TL2 を得る.

$$\mathrm{TL2}\left|\begin{array}{lll} \text{Min.} & \max\{a(u,v)\, x(u,v) : [u,v] \in E\} & \\ \text{s.t.} & \sum\{l(u,v)\, x(u,v) : [u,v] \in E\} \geq \bar{L}, & (1) \\ & S_r(\mathbf{1} - \boldsymbol{x}) \text{ は連結}, & (2) \\ & x(u,v) \in \{0,1\} \quad ([u,v] \in E). & (3) \end{array}\right.$$

条件 (2) を TL2 から除くと, ボトルネック・ナップサック問題が得られる. この問題に対し, 条件 (2) を満たす最適解は $\mathrm{O}(|E|) = \mathrm{O}(|V|)$ 時間で求められる. また, 頂点 r 及び値 $a(u,v)$ $([u,v] \in E)$ も $\mathrm{O}(|V|)$ 時間で求められる.

定理 3. 最遠距離最小化・離散的部分木問題はボトルネック・ナップサック問題に $\mathrm{O}(|V|)$ 時間で帰着でき, $\mathrm{O}(|V|)$ 時間で解ける. ■

この問題と同様に, 今回扱った他のいくつかの問題についても, 以下のようにナップサック型問題との対応付けが出来た.

距離和最小化・離散的部分木⇔ 0-1 ナップサック問題
最遠距離最小化・連続的部分木
⇔ 連続ボトルネック・ナップサック問題
距離和最小化・連続的部分木⇔ 連続ナップサック問題

4. おわりに

本研究では, 木構造ネットワークでの様々な施設配置問題に対し, 効率的な算法を提案した. 表 2 に各問題に対する算法の時間計算量を示す.

表 1 : 配置の目的と配置する施設の種類

配置の目的	配置する施設
最遠距離 最小化	離散的部分木
距離和 最小化	連続的部分木
最遠距離 最大化	離散的道
距離和 最大化	連続的道

表 2 : 各算法の時間計算量

目的 \ 施設	離散的部分木	連続的部分木
最遠距離最小	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$
距離和最小	$O(L^2\|V\|\log\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$
最遠距離最大	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$
距離和最大	$O(L^2\|V\|\log\|V\|)$	$O(L^2\|V\|\log\|V\|)$[4]

目的 \ 施設	離散的道	連続的道
最遠距離最小	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$
距離和最小	$O(\|V\|\log\|V\|)$	$O(\|V\|^2)$
最遠距離最大	$\Theta(\|V\|)$	$\Theta(\|V\|)$
距離和最大	$O(\|V\|\log\|V\|)$	$O(\|V\|^2)$

目的関数が最遠距離かつ配置する施設が離散的な場合には, 目的関数の取りうる値が $\mathrm{O}(|V|)$ 個に限られる. 連続的な施設を配置する場合も, 目的関数の取りうる値はかなり限定されてくる. そのために問題が扱いやすくなり, 全ての問題に対して線形時間解法を示すことが出来た.

距離和を目的関数とする問題は比較的難しく, 今回扱った問題のうち, 特に距離和最小化・離散的部分木, 距離和最大化・離散的及び連続的部分木を求める問題は NP-困難であることが知られている [4, 2]. 距離和最大化・連続的部分木に対しては擬多項式時間算法が提案されているが [4], 同様の算法が他の 2 つの問題にも適用できることを確認した. また, 目的関数が距離和で離散的道を配置する問題については, 分割統治法において木の分割方法に工夫を加えることで効率的な解法を構築できた.

施設配置問題は配置の目的と配置する施設の組み合せにより, 問題の難しさが様々に変わる. 各問題がどの程度効率的に解けるのかを突き詰めていくことにより, 問題のある意味での難しさ, すなわち計算時間の面から見た問題の複雑度が見えてくる.

参考文献

[1] Hakimi, S. L. (1964), *Operations Research*, **12**, 450–459.

[2] Hakimi, S. L., Schmeichel, E. F. and Labbé, M. (1993), *Networks*, **23**, 543–555.

[3] Minieka, E. (1985), *Networks*, **15**, 309–321.

[4] Rabinovitch, R. and Tamir, A. (1992), *Networks*, **22**, 515–522.