

線形不等式で定義された多面体の最小包囲球問題を解くアルゴリズム

朝岡 慎治

(筑波大学第三学群社会工学類経営工学専攻 現所属：NTTデータ通信㈱)

指導教官 山本芳嗣教授

1. はじめに

n 次元Euclid空間 R^n 上に多面体が与えられたとき、その多面体を含む半径最小の球を求める問題を「 n 次元多面体の最小包囲球問題」という。その応用分野としては、最適施設配置問題などがあり、数理計画の基本的かつ古典的な問題として知られている。

ところが多面体の定義の違いによって、問題が大きく2つに分類される。つまり、多面体が母点の凸包で定義されている場合と、線形不等式で定義されている場合である。

多面体が母点の凸包で定義されている時、最小包囲球問題を解くさまざまなアルゴリズムが現在までに構築されてきた。ところが線形不等式で定義されている場合に利用できるアルゴリズムは多くない。

多面体の定義の相違によって最小包囲球問題の難易度が異なる最大の点は、多面体のすべての端点を計算することが困難なことである。したがって本研究では多面体の端点計算をなるべく行わず、かつ端点計算を行なう場合にもできるだけ簡単な問題となるようアルゴリズムを構築した。

2. アルゴリズム

2.1 問題の定式化

$X = \{x | Ax \leq b\}$ としたとき問題は以下のように定義される。

$$\begin{cases} \min & r \\ \text{s.t.} & \max_{x \in X} \|x - y\|^2 \leq r \end{cases} \quad (1)$$

2.2 Algorithm

Step 0 : 全端点が既知の $X \subseteq X^0$ となる集合 X^0 を作り、その端点集合を P^0 する。 $k=0$;

Step 1 : 点集合 P^k の最小包囲球 S^k を計算

Step 2 : If $P^k \cap \partial S^k \subseteq X^+$

then終了。

else $(P^k \cap \partial S^k) \setminus X$

から1点を選びそれを p^k とし、 $P^k = P^k \setminus \{p^k\}$ 、

さらに、 p^k が満たしていない制約すなわち

$$a_{i(k)} p^k > b_{i(k)}$$

となる制約を1つ選び、その番号を $i_{i(k)}$ とする。

$^+ \partial S^k$: 集合 S^k の境界

Step 3 : 集合 $X' = X^k \cap \{x | a_{i(k)} x \geq b_{i(k)}\}$ の全端点

P' を求め、

$$P^{k+1} = P^k \cup \{p | a_{i(k)} p = b_{i(k)} \text{ for } p \in P'\}$$

$$\{p | a_{i(k)} p > b_{i(k)} \text{ for } p \in P'\}$$

$$X^{k+1} = X^k \setminus X'$$

$k = k + 1$: Step 1へもどる。

(Step 1) 点集合 P^k の最小包囲球 S^k を計算 Sekitani-Yamamoto [1] の再帰的アルゴリズムを使用。

(Step 3) 集合 X' の全端点 P' を計算 Fukura[2]のアルゴリズムを使用。

このアルゴリズムでは次の定理が言える。

Theorem 2.1 制約領域 X が有限個の線形不等式で定義されているならば、このアルゴリズムは有限回の反復で最適解を見つかる。

また、このアルゴリズムの特徴を以下に記す。

- $P^k \cap \partial S^k$ の点 X に入っていればよいので、 X の端点の一部を知るだけで問題が解ける可能性がある。
- アルゴリズムを途中で終了しても、その時点で得られている S^k は P^k の最小包囲球であり、集合 X を含む包囲球である。

3. 計算機実験結果

計算機実験としてパラメータ変化のアルゴリズムへの影響について解析した。ここでパラメータとは制約領域を決定する次元 n 、不等式本数 m 、さらに多面体 X の形状を定める r である。パラメータ r については論文を参照されたい。

3.1 step 3の端点列挙問題を解くときの X' の平均制約本数

図1は横軸が次元 n 、縦軸がstep 3で X' の端点列挙問題を解くときの制約の平均本数を示し、 m を変化させプロットしたものである。グラフが n に対してほぼ一意で定まっているので傾きを詳しく見るために各軸を対数軸にとりプロットしたのが右の図2である。図2のグラフの傾きの平均は1.458099であり、このことからstep 3で端点列挙問題を解くときの X' の制約の平均本数を M として計算すると、

$$M = n^{1.458} + 1.1668$$

	n			
	2	3	4	5
$M = n^{1.458} + 1.1668$	3.914	6.129	8.714	11.616

この結果からアルゴリズムの中で端点列挙を行なう多面体 X' は制約の本数がそれほど多くなく、 X' の全端点列挙問題は困難な問題ではないと言える。

3.2 プログラムの計算時間と包囲球の半径の推移

図3は横軸が制約本数 m 、縦軸がプログラムの計算時間を示し、 n を変化させプロットしたものである。グラフから計算時間は m に対してほぼ線形関数で、 n に対して指数関数で増加していることがわかる。

次に右の図4は、アルゴリズムの反復に伴い最小包囲球 S^k の半径がどのように変化しているのかをプロットしたものであり、横軸が反復回数、縦軸が半径を示している。図からもわかるように本研究のアルゴリズムでは最小包囲球の半径が比較的早い段階で最適値に近い値を得ていることがわかる。これはアルゴリズムを途中で終了させても、最適値の良い近似解を見つけることができることを意味している。

4. 結論

計算機実験の結果を通して、本論文のアルゴリズムはこれまで困難と思われてきた線形不等式で定義された多面体の最小包囲球問題に対し1つの有効な解法となりうると言える。実際、メニューという改良を加えることによってさらにアルゴリズムが効果率的になり、計算時間の短縮に結びつくことができた。既存のアルゴリズムと比較しても、計算速度では優れていることがわかり、またアルゴリズムの性質も、どの段階においても多面体の包囲球を与えている本論文のアルゴリズムのほうがメリットが多い。

計算機実験結果で注目すべき点は、全端点列挙問題を解くときの多面体 X' の制約本数がそれほど多くなく、そのため計算する端点数も限られている点である。しかもその制約の本数は次元に対して線形に近い関数で定まる。

しかし本論文で扱った問題は非負制約を持った多面体についてのみ計算機実験を行っており、非負制約なしの問題については今後の課題と言えよう。

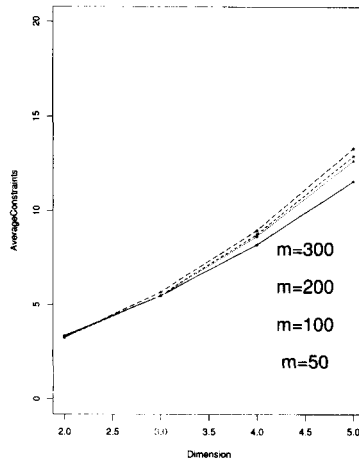


図1 X' を決めている制約の平均本数

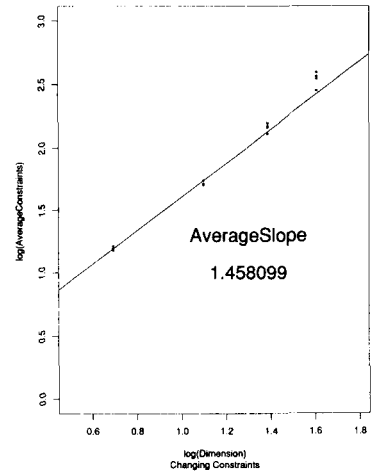


図2 図1を対数軸でプロットしたもの

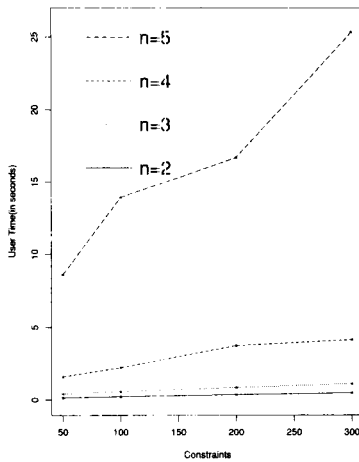


図3 計算時間

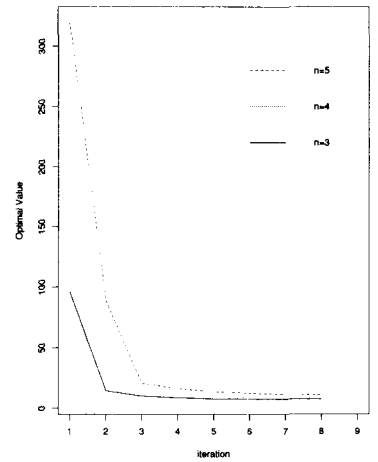


図4 包囲球の半径の推移

参考文献

- [1] K. Sekitani and Y. Yamamoto (1993) : "A Recursive Algorithm for Finding the Minimum Covering Sphere of a Polytope and the Minimum Covering Spheres of Several Polytopes," *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.10, pp. 255-273.
- [2] D.Avis and K.Fukuda (1992) : "A Pivoting Algorithm for Convex Hulls and Vertex Enumeration of Arrangements and Polyhedra," *Discrete Computational Geometry*, Vol.8, pp.295-313.