入門講座

やさしい待ち行列(1)——図で考える待ち行列

高橋　幸雄

待ち行列理論は20世紀初頭からその研究が始められ、1917年にはデンマークの電話会社の技師 A.K. Erlang によってたいへん有名な論文が書かれています。待ち行列理論はすでに90年近い歴史をもっていて、これは OR や線形計画法の歴史よりも古いのです。この間、多くの研究者が待ち行列理論を研究して、多くの混雑現象についてその性質を明らかにしてきました。それでもまだまだわからないことが沢山ありますし、社会や技術の進歩にともなって解明しなければならない新しい問題も沢山でてきています。ただ、学問の歴史が古くなると、どうしても学問そのものがだんだん難しくなり、若い人が最先端に到達するまでに多くの勉強が必要になってしまいます。だんだん敷居が高くなってしまうのです。

待ち行列理論もその"難し病"にかかりつつあります。そこで、待ち行列の原点に戻って、その基本的な点をできるだけ易しく解説してみることにしました。こうすることによって、若い人々に少しでも待ち行列のおもしろさを理解してもらえたら、そしてそれを通じて新しい問題にチャレンジするきっかけを掴んでいただけたら、と思っています。うまくいくかどうか心配ですが、どうぞお付き合いください。はじめは「図で考える待ち行列」と題して、流体モデルのお話をいたします。

1. 学生食堂の待ち行列

大学の学生食堂を考えてみましょう。午前の授業が終わると、学生たちは一斉に食堂にやってきます。当然、長い行列ができます。では、(a) 授業が終わると同時に教室を飛び出して行列に並ぶのと、(b) 先生をつかまえて質問をしたり、友人とおしゃべりをしたりして、ゆっくり時間を稼いでから行列に並ぶのと、どちらが賢いでしょうか。

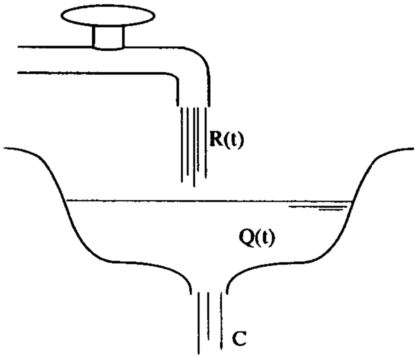

図 1: 水道モデル

このような問題は、図1の水道をイメージしたモデルで考えるとわかりやすいでしょう。蛇口からは、はじめはチョロチョロとしか水はでてきませんが、だんだんたくさん出るようになり、そのうちドッとすごい勢いででてきます。ただそれも長くは続かず、ピークを過ぎるとだんだん出る量は減っていって、チョロチョロのあと、水は止まってしまいます。

出る水の量が少ないときには、器には水が貯まりません。蛇口から出てきただけ排水孔から流れでてしまうからです。蛇口から出てくる水の量が排水孔から流れ出る水の量を上回るようになってはじめて、水が貯まりだします。蛇口から水がドッと出てくるようになると、器の中の水の量はどんどん増えていきます。これが学生食堂の長い待ち行列に相当します。蛇口から出る水の量が減ってきても、器に貯まった水はすぐにははけません。水が全部はけるまでには結構時間がかかるのです。

この状況をグラフを使ってもう少し詳しく見てみましょう。図2は、単位時間当たりに蛇口からでてくる水の量 (流量) を表したグラフです。横軸は時間、縦軸

たかはし ゆきお　東京工業大学 大学院 情報理工学研究科 数理・計算科学専攻
〒152 東京都目黒区大岡山 2-12-1

が流量です。このように器に入ってくる流量のことを待ち行列理論では“入力率”と呼んでいます。ここではこの入力率を関数 $R(t)$ で表すことにしましょう。一方、器の中にいっぱい水が入っているときに、排水孔から単位時間に流れ出す流量を“サービス率”と呼びます。サービス率は C で表します。さらに、時刻 t における器の中の水の量を $Q(t)$ で表すことにします。

はじめ、$R(t)$ が C 以下のときは水は貯まりませんから、$Q(t)=0$ です。$R(t)$ が C を超えると水は貯まり出します。貯まっていくスピード $\frac{d}{dt}Q(t)$ は、入ってくる率と出ていく率の差ですから $R(t)-C$ となります。この関係は $R(t)-C$ が負であっても、水が貯まっている間はずっと成り立ちます。したがって、貯まっている水の量の変化を表す微分方程式は

$$\frac{d}{dt}Q(t)=\begin{cases} R(t)-C, & R(t)\geq C \text{ または} \\ & Q(t)>0 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases} \tag{1}$$

となります。これが本稿で扱う流体モデルの基本方程式です。といっても、この微分方程式を数学的に解こうというのではありませんからご安心ください。

入力率関数 $R(t)$ が図2の曲線で与えられているものとしましょう。高さ C の水平線が出力率を表しています。入力率曲線がこの水平線と交わる時刻を t_1, t_3、入力率曲線が最大となる時刻を t_2 とします。

時刻 t_1 までは $R(t)<C$ ですから水は貯まりません。つまり $Q(t)=0$ です。ではクイズ、

クイズ 1
器の中に貯まった水の量、つまり食堂の待ち行列、$Q(t)$ が最大になるのはいつでしょうか。

答えは時刻 t_2 でしょうか。そうではないですね。このときの器の中の水の量 $Q(t)$ の動きを示したのが図3です。時刻 t_1 までは $Q(t)=0$ ですが、t_1 を過ぎると $Q(t)$ はだんだん増えていき、時刻 t_2 では曲線の傾き、つまり増加の割合、が最大になります。器の中の水の量 $Q(t)$ が最大になるのは $\frac{d}{dt}Q(t)=0$ のときですから、式(1)から $R(t)-C=0$ のとき、つまり時刻 t_3、ということがわかります。

時刻 t_3 を過ぎると $Q(t)$ はだんだん減っていきますが、では

クイズ 2
$Q(t)$ が再び0となる時刻 t_4 はいつでしょう。

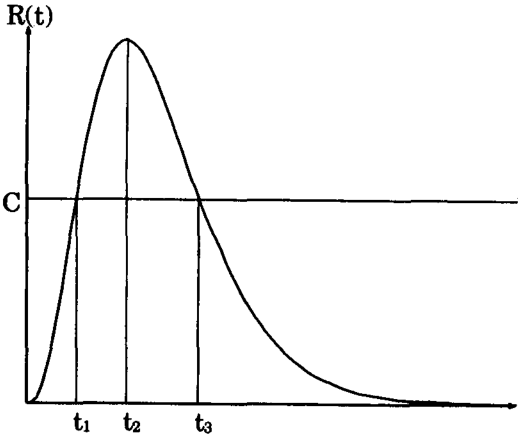

図 2: 水道から単位時間にでる水の量 (入力率)

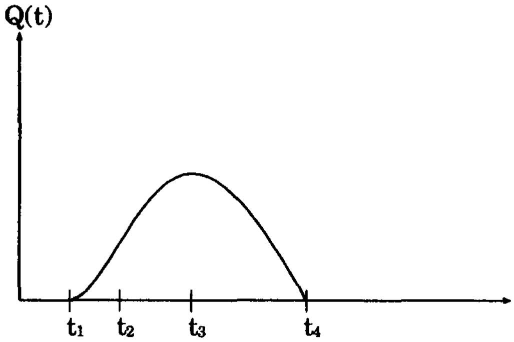

図 3: 器の中の水の量

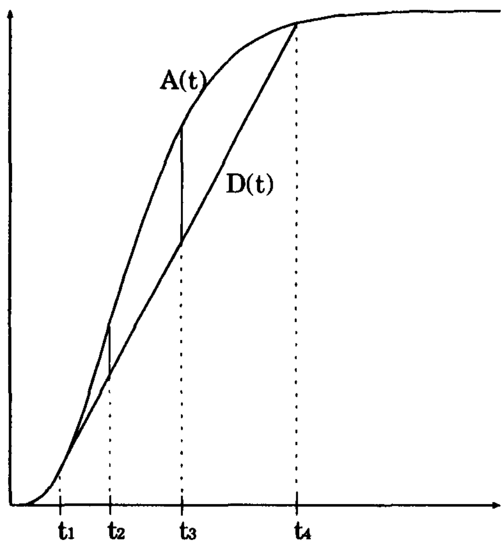

図 4: 入力量と出力量の累積グラフ

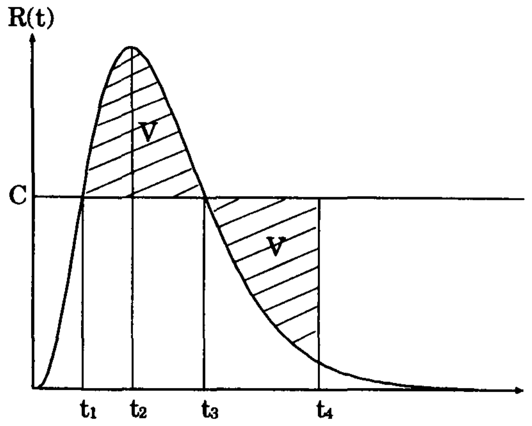

図 5: 滞貨がなくなる時刻 t_4

$Q(t)$ が再び 0 となるのは、それまでの滞貨を一掃できたときです。つまり図 2 で、時刻 t_3 までの滞貨は t_1 から t_3 の間の $R(t)$ が C を上回った分に相当します (図 5)。この面積を V としましょう。この滞貨を t_3 から t_4 の間のサービス能力の余裕でもって処理するのですから、C と $R(t)$ の間の面積が V と等しくなるような t の値が t_4 となります。

この t_4 は、図 4 のような累積の流入水量 $A(t)$ と累積の排水量 $D(t)$ のグラフを書くとわかりやすいと思います。累積のグラフですから $A(t)$ も $D(t)$ も単調非減少な関数となります。$A(t)$ は $R(t)$ の積分

$$A(t) = \int_0^t R(s)\,ds \tag{2}$$

で与えられます。時刻 t_1 までは入ってきた水がそのまま出ていくのですから $D(t) = A(t)$ です。これは $R(t)$ で表される曲線 $A(t)$ の傾きが C よりも小さいことによります。時刻 t_1 からは $R(t)$ が C を越えるので、$A(t)$ と $D(t)$ の曲線は離れていきます。$A(t)$ は式 (2) で与えられますが、$D(t)$ は傾きが C の直線となります。この直線が再び $A(t)$ と出会ったところが時刻 t_4 です。

図 4 における $A(t)$ と $D(t)$ の高さの差が、図 3 で表される $Q(t)$ です。学生食堂の話に戻りますと、$Q(t)$ は時刻 t における待ち行列の長さ、C は単位時間当たりに処理できる客 (学生) の数ですから、時刻 t に食堂にきた学生は $Q(t)/C$ 時間だけ待たされることになります。授業が終わる時刻は $R(t)$ が最大の値をとる t_2 のあたりでしょうから、食事のことだけを考えるならば、授業が終わるや否や教室を飛び出すことが大変有効であることがわかります。授業が終わってゆっくり後片づけをしてから、おもむろに食堂に向かうのは、待ち行列が最大となる t_3 に近づくことになるので最悪のパターンでしょう。待ち行列がなくなる t_4 くらいまで、先生を捕まえて質問をする方がまだましです。もっとも、学生がみんなこういう考え方をすると $R(t)$ の関数の形そのものが変わってしまいますので、もう一度はじめから考え直さなければいけなくなるかもしれません。

2. 動物園の客の数

図 4 のような図を使うと、ほかにもいろいろ面白いことがわかります。

みなさん、人気のある動物園の園長さんになったと思ってください。いくら人気があっても、たくさんの人が一度に動物園に入ると、休憩所やトイレなどが混んで迷惑をかけますし、事故が起こる可能性も高くなります。そこで

> **クイズ 3**
> 動物園に入っている人の数を常時把握したいのです。どうしたらよいでしょうか。

このことを考えるには、図 4 を少し一般化した図 6 が役に立ちます。ここでも $A(t)$ は時刻 t までに入園した客の累積数、$D(t)$ は時刻 t までに動物園を出ていった客の累積数、とします。ただし、今度の場合、客は勝手に出ていきますから $D(t)$ は直線になるとは限りません。この図で、時刻 t における $A(t)$ と $D(t)$ の差 $Q(t) = A(t) - D(t)$ が、その時刻に園内にいる客の数を表しています。ところで図 6 の 2 つの曲線 $A(t)$ と $D(t)$ は最後は必ず一致します。一致しないとしたら、ライオンに喰われたお客さんがいる、というので大騒ぎになるでしょう。

このように、ある時刻で動物園の中にいるお客さんの数をみるには、$A(t)$ と $D(t)$、あるいはその差 $Q(t)$ を測定すればよいのです。動物園の出入口に係員をひとりずつおいて客の出入りをチェックするだけで、簡単に測定できます。図 6 を書く必要もありません。

ここでのポイントは、ある特定の時刻に動物園内のお客さんの数を数えるのは難しくても、開園時から継続して測定していれば、園内のお客さんの数は比較的簡単にわかる、ということです。これは園内のお客さ

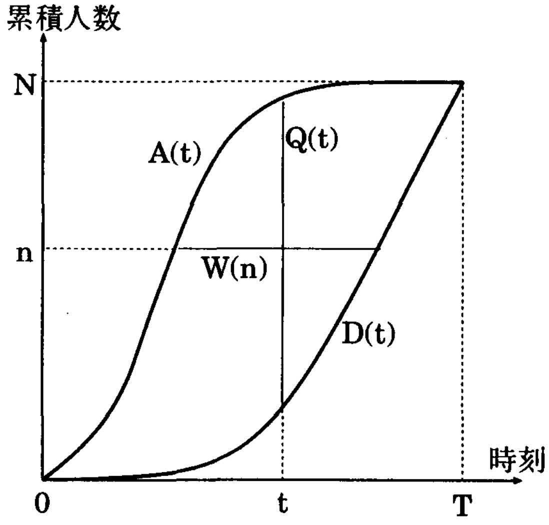

図 6: 動物園の入園者数と退園者数

んの数 $Q(t)$ が、式 (1) で C を時間の関数 $C(t)$ で置き換えた微分方程式を用いて表現できることからきています。ただ、途中で測定に誤差が入るとそれが最後まで響いてしまいます。そこさえ注意すれば、これはたいへん有効な方法です。

動物園で過ごす時間

では、ついでにお客さんが動物園でどのくらいの時間遊んでいくのかを知ることはできないでしょうか。

クイズ 4 お客さんが動物園で過ごす時間をなるべく簡単に調べるにはどうしたらよいでしょう。

お客さんひとりひとりが園内で過ごす時間を調べるのだったら、客が入園するときにその時刻を書いた紙を渡し、退園するときにその紙を回収して時刻を記入する、という方法がすぐに思い浮かびます。ただこの方法ですと、お客さんが園内にいる間、その紙を汚したりなくしたりしないようにしてもらわなければなりません。時刻の記入も結構面倒かもしれません。

じつはもっと簡単な方法があるのです。図 6 を見てください。縦軸は累積の人数ですから、単位は人です。そこで高さ n の水平線が2つの曲線 $A(t)$ と $D(t)$ によって切り取られる線分の長さ $W(n)$ は何を表しているでしょうか。

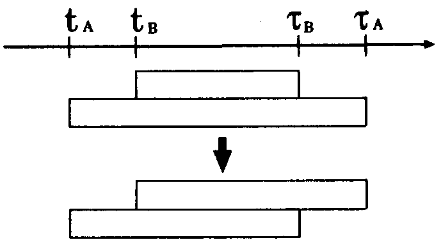

図 7: 退園順序に無関係な滞在時間の和

もし、お客さんが入った順に出ていってくれるのならば、これは n 人目のお客さんの滞在時間になっています。入った時刻と出ていった時刻の差だからです。学生食堂の場合には、行列に並んだ順にサービスされるのがふつうですので、このようにして待ち時間を求めることもできます ($D(t)$ の傾きが C で一定なことから、時刻 t に到着した学生の待ち時間は $Q(t)/C$ と計算できるのです)。動物園の場合、入った順に出るということは期待できませんので、この手は使えません。ただし、ここからがうまいところなのですが、お客の「総滞在時間」を考えると、同じような議論が可能なのです。

簡単な2人の場合を考えましょう。図7で、A さんは B さんより先に入り、後に出たものとします。A さん、B さんの入園時刻と退園時刻をそれぞれ t_A, t_B, τ_A, τ_B とすると、A さんの滞在時間は $\tau_A - t_A$、B さんの滞在時間は $\tau_B - t_B$ となります。したがって2人の滞在時間の和は $\tau_A + \tau_B - t_A - t_B$ です。ここで、仮に2人の出ていく順序が逆になって、A さんが時刻 τ_B に出て、B さんが時刻 τ_A に出たものとしましょう。すると A さんの滞在時間は $\tau_B - t_A$、B さんの滞在時間は $\tau_A - t_B$ となって、2人の滞在時間の和は前と同じ $\tau_A + \tau_B - t_A - t_B$ となります。

このように、滞在時間の総和を考えるときには、お客さんが入った順に出ていくかどうかは気にしなくてよいのです。誰かが入ったということと、誰かが出ていったということだけをしっかり記録しておけば十分です。

上のことから、図6で2つの曲線 $A(t)$ と $D(t)$ で囲まれた部分の面積 S は、お客さんの滞在時間の総和 $\sum_n W(n)$ を表していることがわかります。この S を客の総数 N で割れば、客の平均滞在時間 W が求められます。つまり、クイズ4の答えは、平均滞在時

間だけ求めればよいのならば、$A(t)$ と $D(t)$ を計測して、その間の面積 S から平均滞在時間を $W = S/N$ のように計算する、ということになります。

リトルの公式

上のことを利用した有名な公式があります。$A(t)$ と $D(t)$ の間の面積を S、客の総数を N、開園から閉園までの時間を T とすると、

$$\begin{array}{lrcl} \text{平均滞在時間} & W & = & S/N \\ \text{平均園内客数} & L & = & S/T \\ \text{客の平均到着率} & \lambda & = & N/T \end{array} \tag{3}$$

となります。L が平均園内客数であることは、S が $Q(t) = A(t) - D(t)$ の積分であることから導かれます。また λ は単位時間当たりの到着数ですから、$R(t)$ の平均と考えることもできるでしょう。

(3) の3つの式から S, N, T を消去すると、

$$L = \lambda W \tag{4}$$

という関係式が得られます。これはLittleの公式と呼ばれ、待ち行列理論でもっとも基本的な関係式のひとつです。到着率 λ はわかっていることが多いので、平均待ち時間 W と平均待ち行列長 L は、一方の値が計算できれば、他方はこのリトルの公式から求められる、ということになります。この式は上の導出過程からわかるように、ほとんど条件らしい条件なしでいつでも成り立ちますので、応用上たいへん便利です。

3. いろいろな応用

図6や図4のような考え方は、いろいろな場面で応用することができます。実際、図6の考え方は、デパートやイベント会場でのお客さんの数や滞在時間を調べるときによく利用されます。また図4は、単に待ち行列の長さを解析するだけでなく、それをコントロールする問題や、複雑な待ち現象を解析するのに応用できます。ここでは2つの応用例を紹介しましょう。

ダムの放水

ダムの水を調節することはかなり難しい仕事のようです。降水量の予測や水源地に降った雨がダムに到達するまでの時間の予測など、不確定な要素がたくさんあります。しかもダムが溢れないようにするだけでなく、下流での水利用のため最低限の放水量も確保しなければなりません。

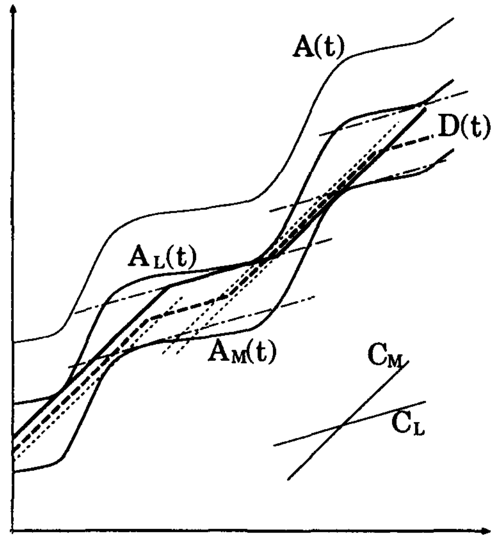

図 8: ダムの放水プラン作成

ここでは問題を簡単にして、ダムへの流入率関数 $R(t)$ がわかっているものとして、ダムの貯水量 $Q(t)$ と放水量 $C(t)$ につぎのような制約を加えます。

$$Q_L \le Q(t) \le Q_M$$
$$C_L \le C(t) \le C_M$$

そしてできるだけ放水量の変更回数を小さくしたいのです。

> **クイズ5**
> このダムの放水の問題を図4のようなグラフを用いて解くには、どのような図を描いて考えたらよいでしょう。

まず、累積流入量 $A(t)$ のグラフに $Q(t)$ についての制約を書き込むとよいでしょう。これが図8です。$A(t)$ を Q_L および Q_M だけ下に平行移動したグラフが $A_L(t)$ と $A_M(t)$ です。累積放水量関数 $D(t)$ がこの2本の曲線の間に入っていれば、$Q(t)$ についての制約は満たされます。一方 $C(t)$ についての制約は、$D(t)$ の傾きに関する制約となります。欄外に傾きが C_L と C_M の直線を書いておくとよいでしょう。

ここまで準備して、いよいよ累積放水量のグラフを書いていきます。図8の太い実線の折れ線を見てください。これは $A_L(t)$ の谷に接する傾き C_M の直線か

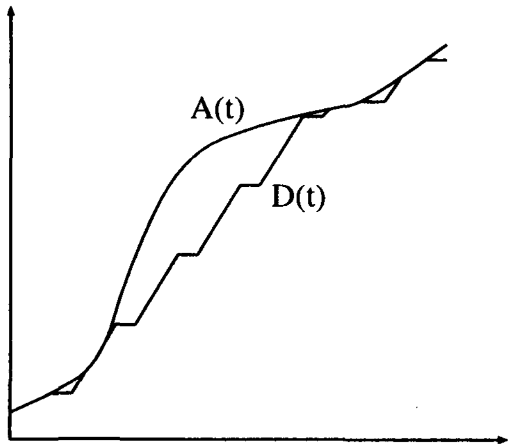

図 9: 交差点での待ち行列

らはじめて、それが曲線 $A_L(t)$ に交わる手前でつぎの谷に接する傾き C_L の直線に乗り換え、それが $A_M(t)$ に交わる手前で $A_M(t)$ のつぎの山に接する傾き C_M の直線に乗り換え、$\cdots$、という具合に書いたものです。こうすれば放水量の切り替え回数を最小にする解が導けるでしょう。ただこの解は境界線 $A_L(t)$, $A_M(t)$ に接していて、余裕があまりありません。そこで図8の太い点線の折れ線のように、両側の接線の真ん中あたりを通る直線をつないだ方が余裕という面ではよりよいプランができるかもしれません。

信号機のある交差点

信号機のある交差点を考えてみてください。簡単のため、はじめはひとつの方向だけに着目することにしましょう。青信号では、車は一定のスピードで交差点を通過することができますが、黄信号と赤信号では、車は止まって信号が変わるのを待たなければなりません。このような交差点での信号待ちの状況も図4と同様の図を使って解析することができます。

図9をご覧ください。累積の到着台数 $A(t)$ が与えられると、累積の通過台数 $D(t)$ は信号の変化にしたがって次のようになります。

信号が赤や黄色のときは車は進めないので、$D(t)$ は水平な方向へ動きます。信号が青に変わると、待っていた車は一定の割合で交差点を通過していきますので、$D(t)$ は右上がりの直線になります。このときの傾きは単位時間当たりに交差点を通過することのできる車の台数です。

信号が青の間に待ち行列がなくなってしまえば、信号が黄に変わるまで $D(t)$ は $A(t)$ と重なって動きます。混雑が激しいときは $D(t)$ の直線は $A(t)$ に届きません。その前に信号が変わって、$D(t)$ は再び水平運動を余儀なくされるのです。

交差点における待ち行列をこのように捉えると、信号の周期とそこにおける赤や青の時間の長さをどう設定したらよいかがわかります。いまのように一方向だけを考えるのならば、赤の時間を短く青の時間を長くすれば、平均待ち時間は小さくできます。自分と交差している相手の道路のことを無視しているからです。では交差している道路まで考えに入れるとどうなるでしょうか。

クイズ 6

信号機のある交差点で、各方向からの通過する車の平均待ち時間を小さくするには、赤信号と青信号の時間はどのように設定したらよいでしょうか。ただし、安全性の観点から、黄信号の長さは決まっているものとします。

実は、これは結構難しい問題です。多くの場合、待ち行列が0となったときに黄信号に変わるようにするのがうまい設定の仕方になります。

まずとっかかりとして、各方向からの到着率 $R(t)$ がそれぞれ一定であるモデルをたてて計算してみてください。上の解がどう表されるかはそれほど難しくありませんが、それが最適であるかどうかを調べるのはかなりたいへんです。実際、道路がすいていて、しかも2本の道路の交通量が格段に違うときなど、全体の平均待ち時間を小さくしようとすると、違った解が最適となることもあります。これは待ち行列ネットワークに特有の現象で、これについてはまた後の回でお話しするチャンスがあるでしょう。

なお、今回の話題に関する他の応用例などは [1] をご参照ください。[1'] は [1] の第1版の和訳です。図は大学院生の大原久樹君にお願いしました。

次回は、電車やエレベータなどを材料に、等間隔運転がどのように待ちを減らすかを見ていく予定です。

参考文献

[1] G.F. Newell, *Applications of Queueing Theory*, 2nd ed., Chapman and Hall, 1982.

[1'] G.F. ニューエル著, 森村英典·森雅夫訳, 「待ち行列論の応用」, サイエンス社, 1973.