解　説

内点法(4) ——一般の数理計画問題の場合——

水野　眞治

1. はじめに

本論では，線形計画問題を一般化した線形相補性問題，2次計画問題，非線形計画問題の内点法について解説する．内点法の理論的な収束性を議論するために，線形相補性問題が単調であり，2次あるいは非線形計画問題が凸であることを仮定する．内点法は，もともと凸計画問題などを解く方法としてFiacco and McCormik[2]らにより研究された．しかし，Karmarkar [7] の発表以後，線形計画問題の解法として爆発的に研究され，さまざまな理論的性質が解析され，実用的に非常に高速な解法となった．そのような状況の中で凸計画問題を解く方法としても改めて研究され，理論的な収束性も明らかにされた．

2次計画問題と凸計画問題を解く内点法には，大きく分けて2つのタイプがある．1つは与えられた問題（またはその双対問題）を解く内点法であり，他方は主問題と双対問題を同時に解く（あるいは最適条件を解く）内点法である．前者の内点法は，Karmarkar以前から研究されていた方法の延長線上にあり，罰金関数を使って説明することができる．後者の内点法は，Karmarkar以後に研究され，主双対内点法と呼ばれている．凸計画問題の最適条件が相補性問題とみなせることからも推察できるように，相補性問題を解く内点法は主双対内点法と多くの共通点を持つ．特に線形計画問題と凸2次計画問題の主双対内点法は，線形相補性問題の内点法とみなすことができる．

2節で線形相補性問題，3節で2次計画問題，4節で凸計画問題の内点法の枠組みを解説する．本論では，パラメータの値あるいはステップサイズの具体的な決め方などアルゴリズムの詳細については説明しない．

みずの　しんじ　文部省　統計数理研究所
〒106 港区南麻布4-6-7

それらについては，第2回あるいは3回で解説した線形計画問題の内点法と参考文献等を参考にして頂きたい．5節では，これらの問題の内点法の共通点と違いを簡単に述べ，今までに知られている内点法の理論的結果についてまとめる．最後に6節でさらに広範囲の問題の内点法について述べる．

2. 線形相補性問題

m と n を正の整数とする．n 次正方行列 M，n 次元ベクトル q が与えられており，$x\in R^n$ と $z\in R^n$ を変数ベクトルとする．このとき線形相補性問題は，線形条件

$$z=Mx+q, \tag{1}$$

相補性条件

$$Xz=0,$$

非負条件

$$x\geq 0,\quad z\geq 0,$$

を満たすベクトルの組 (x,z) を求める問題である．ここで $X=\mathrm{diag}(x)$ は，ベクトル $e=(1,1,\cdots,1)^T$ に対して，$Xe=x$ を満たす対角行列である．この節では線形条件が(1)のように表わされる線形相補性問題のみを取り扱うが，これと異なる線形条件で表わされる問題も同様に扱うことが可能である．線形計画問題の主双対問題も，線形条件は(1)と異なるが，線形相補性問題とみなすことができる．線形相補性問題の内点とは，正の点 $(x,z)>0$ のことをいう．また，線形条件(1)を満たすとき，点 (x,z) が実行可能であるという．

行列 M が半正定値行列である，すなわち任意の x に対して $x^TMx\geq 0$ が成立すると仮定する．このとき，単調な線形相補性問題という．線形相補性問題の相補性条件 $Xz=0$ をパラメータ $\mu>0$ を使った条件

$Xz=\mu e$ に置き換えた問題

$$\begin{aligned} &z=Mx+q,\\ &Xz=\mu e,\\ &x>0,\ z>0 \end{aligned} \tag{2}$$

を考える．ここで，条件 $x_iz_i=\mu$ より x_i と z_i が 0 とならないので，非負条件を正の条件 $x>0$，$z>0$ に置き換えた．実行可能内点が存在するならば，この問題の解が唯1つ存在する．それを $(x(\mu), z(\mu))$ と表わし，センターと呼ぶ．センターの集合

$$P=\{(x(\mu), z(\mu)) : \mu>0\}$$

は，線形計画問題の場合と同様になめらかなパスであり，センターパスと呼ばれる．μ が 0 に近づけば，センターパス上の点 $(x(\mu), z(\mu))$ が1点 (x^*, z^*) に収束し，その点は線形相補性問題の解である．

内点法では，初期内点 (x^0, z^0) が与えられたときに，内点の列 $\{(x^k, z^k)\}$ を生成する．ここで，初期点が実行可能とは限らないインフィージブル内点法について，第 k 反復目の内点 (x^k, z^k) が得られていると仮定し，次の内点 (x^{k+1}, z^{k+1}) の求め方を説明する．パラメータ μ の値を定めて，点 (x^k, z^k) においてセンターを定める方程式系(2)にニュートン法を適用したときの探索方向 $(\Delta x, \Delta z)$ を求める．すなわち，線形方程式系

$$\begin{aligned} &\Delta z-M\Delta x=-(z^k-Mx^k-q),\\ &Z^k\Delta x+X^k\Delta z=-(X^kz^k-\mu e) \end{aligned} \tag{3}$$

の解 $(\Delta x, \Delta z)$ を計算する．次にステップサイズ α を定めて，次の点

$$(x^{k+1}, z^{k+1})=(x^k, z^k)+\alpha(\Delta x, \Delta z) \tag{4}$$

を求める．以上の議論をまとめれば，線形相補性問題を解くインフィージブル内点法は，次のようなステップからなる．

線形相補性問題のインフィージブル内点法

ステップ0：初期内点を (x^0, z^0) とし，$k=0$ とする．

ステップ1：μ の値を定めて，方程式系(3)の解 $(\Delta x, \Delta z)$ を計算する．

ステップ2：ステップサイズ $\alpha>0$ の値を定めて，次の点を(4)により求める．

ステップ3：k を1増加して，ステップ1へいく．

ここで，反復ごとのパラメータ μ とステップサイズ α の決め方を変えることにより，さまざまなアルゴリズムを作ることができる．線形計画問題を解く Lustig et al. [14] のアルゴリズムを線形相補性問題の場合にも適用すれば，定数 $\delta\in(0,1)$ を定めて，第 k 反復目ではパラメータ $\mu=\delta(x^k)^Tz^k/n$ とする．ステップサイズは，定数 $\lambda\in(0,1)$ と非負条件を満たす最大ステップサイズ

$$\bar{\alpha}=\max\{\alpha : (x^k, z^k)+\alpha(\Delta x, \Delta z)\geqq 0\}$$

に対して，$\alpha=\lambda\bar{\alpha}$ とする．このアルゴリズムによって生成される点列が解に収束するという保証はない．理論的に収束するようなアルゴリズムとするためには，線形計画問題の場合と同様に，センターパスの近傍あるいはポテンシャル関数を使いステップサイズを求める必要がある．

3．2次計画問題

標準型の2次計画問題は，

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad c^Tx+\frac{1}{2}x^TQx\\ &\text{制約条件} \quad Ax=b,\ x\geqq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

と表わされる．ここで $c\in R^n$，$b\in R^m$ であり，Q は n 次の対称行列，A は mn 行列である．行列 A の階数が m であり，Q が半正定値行列であると仮定する．これを主問題とするとき，その双対問題は，変数 $x\in R^n$，$y\in R^m$ とスラック変数 $z\in R^n$ をもちいて

$$\begin{aligned} &\text{最大化} \quad b^Ty-\frac{1}{2}x^TQx\\ &\text{制約条件} \quad A^Ty-Qx+z=c,\ z\geqq 0 \end{aligned}$$

と表わされる．x が主問題(5)の最適解，そして (x, y, z) が双対問題の最適解ならば，条件

$$\begin{aligned} &Ax=b,\\ &A^Ty-Qx+z=c,\\ &Xz=0,\\ &x\geqq 0,\ z\geqq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

が成立する．この条件を満たす変数 (x, y, z) を求める問題を2次計画問題(5)の主双対問題という．逆に，(x, y, z) が主双対問題の解ならば，x と (x, y, z) はそれぞれ主問題と双対問題の最適解である．この主双対問題(6)は，線形条件は異なっているが，前節で述べた線形相補性問題とみなせる．したがって，線形相補性問題を解く任意のアルゴリズムを使うことにより，2次計画問題とその双対問題を同時に解くことができる．

次に，主問題のみを解く内点法を解説する．線形計画問題の場合と同様に n 次元ユークリッド空間の正

象限 $R^n_+=\{x\in R^n : x\geq 0\}$ の対数罰金関数

$$p(x)=-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

を導入する．2次計画問題(5)の目的関数にパラメータ $\mu>0$ を重みとして罰金関数 p を加えた問題

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & c^Tx+\frac{1}{2}x^TQx+\mu p(x)\\ \text{制約条件} & Ax=b,\ x>0\end{array}\tag{7}$$

を考える．これは凸計画問題である．2次計画問題(5)とその双対問題に実行可能内点が存在すると仮定する．このとき，問題(7)は唯1つの最適解を持つ．問題(7)の最適条件は，制約条件 $Ax=b$ の乗数を $y\in R^m$ とすれば

$$\begin{array}{l}Ax=b,\\ c+Qx-\mu X^{-1}e-A^Ty=0,\\ x>0\end{array}$$

と表わされる．$z=\mu X^{-1}e$ とすれば，

$$\begin{array}{l}Ax=b,\\ A^Ty-Qx+z=c,\\ Xz=\mu e,\\ x>0,\ z>0\end{array}\tag{8}$$

と書き換えられる．これは，主双対問題の相補性条件 $Xz=0$ を条件 $Xz=\mu e$ に置き換えた問題である．この問題の解を $(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$ とする．$x(\mu)$ は凸計画問題(7)の唯1つの解であり，センターと呼ばれる．任意の $\mu>0$ に対して，センター $x(\mu)$ が唯1つ存在するので，集合 $P=\{x(\mu) : \mu>0\}$ はパスになる．これを主問題のセンターパスと呼ぶ．問題(8)は，$\mu\to 0$ のときに主双対問題(6)に一致する．このことから推察できるように，$\mu\to 0$ のとき $x(\mu)$ は主問題(5)の最適解に収束し，$(y(\mu),z(\mu))$ は双対問題の最適解に収束する．

問題(5)のパス追跡アルゴリズムは，初期パラメータ値 $\mu^0>0$ とセンター $\mathrm{x}(\mu^0)$ の近似点 x^0 が与えられたとき，数列 $\{\mu^k\}$ と $\{x^k\}$ を生成する．このとき，μ^k が0に収束し，x^k が問題(7)の最適解 $x(\mu^k)$ の近似解となるように点列を生成する．その結果，μ^k が十分小さくなったときに得られる点 x^k が問題(5)の近似解となる．このアルゴリズムのステップは，次のように表わされる．

2次計画問題のパス追跡法

ステップ0：初期パラメータを $\mu^0>0$，初期内点を x^0 とし，$k=0$ とする．

ステップ1：$\mu^{k+1}\in(0,\mu^k)$ を定める．

ステップ2：x^k を使い，$\mu=\mu^{k+1}$ のときの問題(7)の近似解 x^{k+1} を求める．

ステップ3：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

このときのパラメータ μ^k の更新方法と問題(7)の近似解法についてはさまざまな方法が提案されている．

4．凸計画問題

$y\in R^m$ を変数とする凸計画問題

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & f_0(y)\\ \text{制約条件} & f_i(y)\leq 0,\ i=1,2,\cdots,n\end{array}\tag{9}$$

を考える．ここで，すべての関数 $f_i(y)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ が2階連続微分可能であり，さらに凸関数であると仮定する．凸計画問題は，このように制約条件が不等式で表わされる場合が一般的である．等式制約を含む問題も扱うことができるが，議論を簡単にするため上記の問題のみを対象とする．制約条件を等号でなく厳密な不等号 $f_i(y)<0$ で満たす点 y を（実行可能）内点という．この問題に対応するラグランジュ関数は

$$L(y,x)=f_0(y)+\sum_{i=1}^{n}x_if_i(y)$$

である．このとき，問題(9)の最適条件（Karush-Kuhn-Tucker 条件）は，

$$\begin{array}{l}\nabla_yL(y,x)=0,\\ f_i(y)\leq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ x_if_i(y)=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ x\geq 0\end{array}$$

と表わされる．∇_yL を具体的に表現して，スラック変数 z を導入すれば，

$$\begin{array}{l}\nabla f_0(y)+\sum_{i=1}^{n}x_i\nabla f_i(y)=0,\\ f_i(y)+z_i=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ Xz=0,\\ x\geq 0,\ z\geq 0\end{array}\tag{10}$$

となる．ここで，$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)^T$，$z=(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)^T$，$X=\mathrm{diag}(x)$ である．この問題は，非線形相補性問題とみなすこともできる．内点法でこの問題を解くために，相補性条件 $Xz=0$ をパラメータ $\mu>0$ を使った条件 $Xz=\mu e$ に置き換えた問題

$$
\begin{aligned}
&\nabla f_0(y)+\Sigma_{i=1}^{n} x_i \nabla f_i(y)=0, \\
&f_i(y)+z_i=0, \quad i=1, \ 2, \cdots, \ n \\
&Xz=\mu e, \\
&x>0, \quad z>0
\end{aligned} \tag{11}
$$

を考える．線形相補性問題の場合と同様に，適当な条件（実行可能内点が存在すること）を仮定すれば，この問題の解 $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ が唯1つ存在する．それをセンターと呼び，センターの集合をセンターパスと呼ぶ．$\mu \to 0$ のとき，センターパス上の点は問題(10)の解に収束する．したがって，パラメータ μ を減少させるステップと問題(11)の近似解をニュートン法で求めるステップを交互に行なうアルゴリズムにより，凸計画問題(9)の近似解を求められる．

主問題のみを解く内点法も2次計画問題の場合と同様である．すなわち，凸計画問題(9)に μ を重みとして対数罰金関数を加えた問題

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化} \quad f_0(y)-\Sigma_{i=1}^{n}\mu \ln(-f_i(y)) \\
&\text{制約条件} \quad f_i(y)<0, \quad i=1, \ 2, \cdots, \ n
\end{aligned} \tag{12}
$$

を考える．この問題の最適条件は，

$$
\begin{aligned}
&\nabla f_0(y)-\Sigma_{i=1}^{n}\mu \frac{\nabla f_i(y)}{f_i(y)}=0 \\
&f_i(y)<0, \quad i=1, \ 2, \cdots, \ n
\end{aligned}
$$

と表わされる．$z_i=-f_i(y)$，$x_i=-\mu/f_i(y)$（$i=1$，2，…，n）とすれば，これは問題(11)と一致する．したがって，問題(12)の最適解は $y(\mu)$ であり，$\mu \to 0$ のときに凸計画問題(9)の解に収束する．センターパス $P=\{y(\mu) : \mu>0\}$ を追跡することにより問題(9)を解くアルゴリズムのステップは，次のように表わされる．

凸計画問題のパス追跡法

ステップ0：初期パラメータを $\mu^0>0$，初期内点を y^0 とし，$k=0$ とする．

ステップ1：$\mu^{k+1} \in (0, \mu^k)$ を定める．

ステップ2：y^k を使い，$\mu=\mu^{k+1}$ のときの問題(12)の近似解 y^{k+1} を求める．

ステップ3：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

5．内点法の収束性

線形相補性問題，2次計画問題，凸計画問題の内点法を解説したが，アルゴリズムとしての基本的な枠組みがどの問題の場合にもほとんど同じであることに気づかれたことと思われる．すなわち，主双対問題あるいは相補性問題を解く内点法は，相補性条件 $Xz=0$ をパラメータ μ を使った条件 $Xz=\mu e$ に置き換えた問題の近似解をニュートン法で求めるステップと μ を0に収束するように減少させるステップを繰り返す．また，主問題を解く内点法では，パラメータ μ を重みとして罰金関数を目的関数に加えた問題の近似解を求めるステップと μ を0に収束するように減少させるステップを繰り返す．しかしながら，初期点の求め方，パラメータ μ の更新方法，ステップサイズの決め方，そしてそのときのアルゴリズムの理論的な収束性などは問題により異なる．

単調な線形相補性問題の内点法（あるいは凸2次計画問題の主双対内点法）については，線形計画問題の主双対内点法の場合とほとんど同じように理論的な収束性が成り立つ．たとえば，実行可能内点を初期点として使う場合に，パス追跡法の反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることを Kojima et al. [31], Monteiro and Adler [43] が示し，ポテンシャル減少法の反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることを Kojima et al. [32] が示した．また，インフィージブル内点法の反復回数が $O(nL)$ で抑えられることを Mizuno et al. [36], [42], Potra [45] が示した．異なっているのは，線形計画問題では主問題の変数と双対問題の変数についてそれぞれ別のステップサイズを使う場合の内点法も研究されているが，相補性問題と2次計画問題の内点法では同一のステップサイズを使うアルゴリズムのみ解析されていることと，強相補解が存在しない場合の局所的収束性についての結果である．その理由は，線形計画問題では主問題の変数と双対問題の変数が実行可能性に関して独立であるが，線形相補性問題では互いに依存しているからである，そして線形計画問題では常に強相補解が存在することがわかっているからである．ここで，強相補解とは，任意の i に対して x_i と z_i のうち一方が0であるが，他方が必ず正となる解のことである．線形相補性問題に強相補解が存在することを仮定すれば，線形計画問題の場合と同様に内点法が局所的に超1次収束あるいは2次収束することを Ye and Anstreicher [47], Wright [46], Mizuno et al. [36] らが示した．一方，Monteiro and Wright [44] は，強相補解が存在しない相補性問題に対しては，そのときまでに知られていたすべてのアルゴリズムが局所的に超1次収束しないことを明らかにした．Mizuno [41] は，曲線探索を使うことにより，強相補解が存在しない場合にも局所的に超1次収束するアルゴリズ

ムを提案した．

凸計画問題の場合には，アルゴリズムの大域的収束性を議論する上で，注意しなければならないことがある．それは，相補性問題あるいは2次計画問題では，最適解に十分近い（双対ギャップ x^Tz が 2^{-2L} より小さい)内点から，$O(n^3)$ の計算量で真の最適解を計算できるが，一般に凸計画問題ではこのような性質が成り立たないことである．したがって，凸計画問題を内点法で厳密に多項式時間で解くことはできない．しかし，目的関数値と最適値の差あるいは双対ギャップをある一定の比率以下まで下げるのに必要な反復回数によりアルゴリズムの効率を計ることができる．この反復回数が有限となるための条件を Jarre [40] と Nesterov and Nemirovskii [19] が明らかにした．それらは，関数 f_i のヘシアン (Hessian) の相対的リプシッツ条件 (relative Lipschitz condition) あるいは罰金関数 $-\ln(f_i)$ が自己コンコーダント (self-concordant) となる条件である．たとえば，凸2次制約の凸2次計画問題はこれらの条件を満たし，上記で説明した反復回数を多項式オーダで抑えることができる．

6．おわりに

本論では，単調な線形相補性問題，凸2次計画問題，凸計画問題を解く内点法を解説し，いくつかの理論的収束性についてまとめた．内点法は，さらに広範囲の問題に適用することができる．とくにロバスト制御理論に現われ，組み合わせ最適化問題にも適用できる半正定値計画問題 (semidefinite programming) について，最近多くの研究論文が発表されている．この問題は，対称かつ半正定値である行列の集合（凸錐）を定義し，その中で与えられた線形制約を満たし，１つの線形関数を最小化する行列を求める問題である．これは，非負変数の集合という凸多角錐上の数理計画問題をより一般の凸錘に拡張した問題の１つとみなせる．詳しくは，Nesterov and Nemirovskii[19], Boyd et al. [39] 等を参考にすることを薦める．内点法は，その他にも整数計画問題，より広いクラスの相補性問題または非線形計画問題，変分不等式等にも応用されている．

参考文献

[39] Boyd, S., Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan V.: "*Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory,*" SIAM, Philadelphia (1994).

[40] Jarre, F.: "Interior-Point Methods for Convex Programming," *Applied Mathematics and Optimization* 26 (1992) 287-311.

[41] Mizuno, S.: A Superlinearly Convergent Infeasible-Interior-Point Algorithm for Geometrical LCPs without a Strictly Complementarity Condition," to appear in *Mathematics of Operations research.*

[42] Mizuno, S., Kojima, M. and Todd, M. J.: "Infeasible-Interior-Point Primal-Dual Potential-Reduction Algorithms for Linear Programming," *SIAM Journal on Optimization* 5 (1995) 52-67.

[43] Monteiro, R. D. C. and Adler, I.: "Interior Path Following Primal-Dual ALgorithms. Part II: Convex Quadratic Programming," *Mathematical Programming* 44 (1989) 43-66.

[44] Monteiro, R. D. C. and Wright, S.: "Local Convergence of Interior-Point Algorithms for Degenerate Monotone LCP," *Computational Optimization and Applications* 3 (1994) 131-155.

[45] Potra, F. A.: "An $O(nL)$ Infeasible-Interior-Point Algorithm for LCP with Quadratic Convergence," Reports on Computational Mathematics 50, The University of Iowa, USA (1994).

[46] Wright, S.: "An Infeasible-Interior-Point Algorithm for Linear Complementarity Problems," *Mathematical Programming* 67 (1994) 29-52.

[47] Ye, Y. and Anstreicher, K.: "A Quadratic and $O(\sqrt{n}L)$ Convergence of a Predictor-Corrector Algorithm for LCP," *Mathematical Programming* 62 (1993) 537-551.