解　説

内点法(3) —実行不能な初期点を使う場合—

水野　眞治

1．はじめに

実行可能とは限らない初期点を使う内点法をインフィージブル内点法と呼ぶ．インフィージブル内点法は，実際に計算効率がよいと言われているアルゴリズムであり，最適化問題を解くほとんどのソフトウェアパッケージに採用されている．Lustig et al. [14] によりインフィージブル内点法が提案されて以来，内点法は大きく変化した．たとえば，初期実行可能解を得るために人工問題をいかに作るか，そして人工問題に使うビッグエムと呼ばれる係数の値をいくらに決めるかといったアルゴリズムを実行する上での問題点が解決された．また，インフィージブル内点法は，とても単純であり，その手順を理解する，あるいはプログラムを作成するといったことが簡単にできるという長所も持ち合わせている．インフィージブル内点法は，主に線形計画問題の主双対問題を解くアルゴリズムとして提案され，研究されている．したがって，ここでは主双対問題を解くインフィージブル内点法を解説するが，主問題のみを解くインフィージブル内点法もMuramatsu and Tsuchiya[38]により提案されている．

インフィージブル内点法はアルゴリズムとして単純であるが，その反面理論的解析が実行可能内点を初期点とする場合に比べ難しい．主双対問題の実行可能初期点を使う内点法では，解くべき問題が実行可能であり，解を持つことが問題を解く前から理論的に判明している．しかし，インフィージブル内点法で解く問題の実行可能性などは不明である．したがって，与えられた問題をインフィージブル内点法で解くためには，実行可能性または解の存在性を判定し，さらに解が存在する場合には1つの近似解を求めなければならない．

みずの　しんじ　文部省　統計数理研究所
〒106 東京都港区南麻布4-6-7

2節ではインフィージブル内点法を一般的に解説し，3節でLustig et al. [14] のアルゴリズムを紹介する．このアルゴリズムは，理論的に収束性が保証されていない．4節では，インフィージブル内点法の収束性を解析するための基礎となるセンター曲面を導入し，その性質を示す．その結果を使うことにより，大域的に収束するアルゴリズムを5節で解説する．6節と7節では，理論的に多項式オーダの計算量で問題を解くことができ，さらに局所的に超1次収束するプレディクタ・コレクタ法を紹介する．

2．インフィージブル内点法

m と n を正の整数とし，mn 行列 A, m 次元ベクトル b, n 次元ベクトル c に対して，標準型の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{制約条件} & Ax=b,\ x\geq 0 \end{array} \tag{1}$$

が与えられているとする．このとき主双対問題は，条件

$$\begin{array}{l} Ax=b \\ A^T y+z=c, \\ Xz=0, \\ x\geq 0,\ z\geq 0 \end{array} \tag{2}$$

を満たす変数ベクトル (x,y,z) を求める問題である．ここで，$X=\mathrm{diag}(x)$ は，ベクトル $e=(1,1,\cdots,1)^T$ に対して，$Xe=x$ を満たす対角行列である．この主双対問題の任意の解を (x^*,y^*,z^*) とすれば，x^* は線形計画問題(1)の解であり，(y^*,z^*) はその双対問題の解である．主双対問題の解析的センターは，$\mu>0$ を定数とするとき，方程式系

$$\begin{array}{l} Ax=b \\ A^T y+z=c, \\ Xz=\mu e, \\ x>0,\ z>0 \end{array} \tag{3}$$

の解である．主双対問題(2)に実行可能内点が存在すれば，任意の$\mu>0$に対して解析的センターが存在する．それを$(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$とすれば，センターの集合

$$P_1=\{(x(\mu),y(\mu),z(\mu)):\mu>0\}$$

は，なめらかなパスとなる．$\mu\to 0$のとき，パス上の点$(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$は，解集合上の1点(x^*,y^*,z^*)に収束し，このx^*は問題(1)の解である．したがって，十分小さな$\mu>0$に対して，解析的センターの近似点を求めることにより，線形計画問題(1)を解くことができる．

条件$x>0$と$z>0$を満たすとき(x,y,z)を内点という．初期内点を(x^0,y^0,z^0)とする．インフィージブル内点法の最大の特徴は，この初期点として任意の内点を選ぶことができることである．第k反復目の内点$(x^k,\ y^k,\ z^k)$が得られていると仮定し，次の内点$(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})$の求め方を示す．パラメータ$\mu>0$の値を定め，現在の点$(x^k,y^k,z^k)$において，センターを定義する方程式系(3)にニュートン法を適用したときに計算される方向を$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$とする．一般に方程式系$f(u)=0$に対する点$\bar{u}$でのニュートン方向$\Delta u$は，線形方程式系$\nabla f(\bar{u})\Delta u=-f(\bar{u})$の解である．したがって，$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$は線形方程式系

$$\begin{aligned}&A\Delta x=-Ax^k+b\\&A^T\Delta y+\Delta z=-A^Ty^k-z^k+c\\&Z^k\Delta x+X^k\Delta z=-X^kz^k+\mu e\end{aligned}\tag{4}$$

の解である．この方程式系を解きニュートン方向を計算し，現在の点からその方向にあるステップサイズだけ進み次の点を求める．以上の議論をまとめれば，インフィージブル内点法は，次のようなスΔ_xップからなる．

インフィージブル内点法

ステップ0：初期実行内点を(x^0,y^0,z^0)とし，$k=0$とする．

ステップ1：μの値を定めて，方程式系(4)の解$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$を計算する．

ステップ2：ステップサイズ$\alpha_x>0$と$\alpha_z>0$の値を定めて，次の点$x^{k+1}=x^k+\alpha_x\Delta x$と$(y^{k+1},z^{k+1})=(y^k,z^k)+\alpha_z(\Delta y,\Delta z)$を計算する．

ステップ3：kを1増加して，ステップ1へいく．

ここで，反復ごとのパラメータμとステップサイズα_xとα_zの決め方を変えることにより，様々なアルゴリズムを作ることができる．

3．Lustig et al. のアルゴリズム

Lustig et al. [14]の提案したインフィージブル内点法では，簡単な方法によりパラメータμの値とステップサイズα_xとα_zを決めている．まず，2つの定数$\delta\in(0,1)$と$\lambda\in(0,1)$を選ぶ．Lustig et al. は，$\delta=1/n$あるいは$\delta=1/\sqrt{n}$とし，λとして1に近い値を使っている．第k反復目の点を(x^k,y^k,z^k)とするとき，パラメータ値を

$$\mu=\delta(x^k)^Tz^k/n$$

とする．次の点$(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})$も内点であるためには，ステップサイズをそれぞれ

$$\bar{\alpha}_x=\max\{\alpha:x^k+\alpha\Delta x\geq 0\},$$
$$\bar{\alpha}_z=\max\{\alpha:z^k+\alpha\Delta z\geq 0\}$$

より小さくする必要がある．そこで，定数$\lambda\in(0,1)$を使い，$\alpha_x=\lambda\bar{\alpha}_x$と$\alpha_z=\lambda\bar{\alpha}_z$とすることにより，内点が得られる．$\lambda$の値が大きいほど長いステップを進むことができるが，1に近いと領域$\{(x,y,z):x\geq 0,z\geq 0\}$の境界に近づくので次回以降のステップサイズが短くなる可能性がある．$\Delta x\geq 0$または$\Delta z\geq 0$のときには，$\bar{\alpha}_x$または$\bar{\alpha}_z$が無限大となる．このような場合にもアルゴリズムが実行できるように，$\bar{\alpha}_x$と$\bar{\alpha}_z$がとれる値の最大値を設定する必要がある．

4．センター曲面

前節で解説したアルゴリズムは，実際に主双対問題を解くことができるとは限らない．Lustig et al. [14]はほとんどの例題が解けると報告しているが，Kojima et al. [9]は収束しない例題が存在することを示した．インフィージブル内点法で問題を解くためには，解が存在しないことを明らかにするか，あるいは解が存在する場合には具体的に近似解を1つ求めなければならない．

インフィージブル内点法の収束性を理論的に解析するために，センターパスの定義を拡張して，センター曲面を導入する．初期内点(x^0,y^0,z^0)と二つのパラメータ$\mu>0$とθに対して，方程式系

$$\begin{aligned}&Ax=b+\theta(Ax^0-b)\\&A^Ty+z=c+\theta(A^Ty^0+z^0-c),\\&Xz=\mu e,\\&x\geq 0,\quad z\geq 0\end{aligned}\tag{5}$$

を定義し，その解を$(x(\mu,\theta),y(\mu,\theta),z(\mu,\theta))$と表わす．この点もセンターと呼ぶ．定義より明らかなように，$\theta=0$のとき$(x(\mu,0),y(\mu,0),z(\mu,0))$は方

程式系(3)の解 $(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$ と一致する．センターの存在性について，次の結果が知られている．

定理 1　$\theta_1<1$ と $\theta_2>1$ が存在し，任意の $\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ と $\mu>0$ に対して，方程式系(5)の解が唯一つ存在し，任意の $\theta\notin(\theta_1,\theta_2)$ と $\mu>0$ に対して，方程式系(5)の解が存在しない．ここで，$\theta_1=-\infty$ または $\theta_2=\infty$ となる場合もある．主双対問題(2)に実行可能内点が存在するならば $\theta_1<0$ であり，実行可能内点が存在しないが実行可能解が存在するならば $\theta_1=0$ であり，実行可能解が存在しないならば $\theta_1>0$ である．

この定理は，Mizuno et al. [37] に証明されているが，次のように理解することもできる．パラメータ θ の値を固定して，線形計画問題

$$\text{最小化}\quad (c+\theta(A^Ty^0+z^0-c))^Tx$$
$$\text{制約条件}\quad Ax=b+\theta(Ax^0-b),\ x\geq 0$$

とその双対問題，および主双対問題

$$\begin{aligned}&Ax=b+\theta(Ax^0-b),\\&A^Ty+z=c+\theta(A^Ty^0+z^0-c),\\&Xz=0,\\&x\geq 0,\ z\geq 0\end{aligned}\tag{6}$$

を考える．この主双対問題は，$\theta=0$ のとき問題(2)と一致し，$\theta=1$ のときに実行可能内点 (x^0,y^0,z^0) を持つ．主双対問題(6)に実行可能内点が存在するような θ の集合は，明らかに 1 を含む開凸集合であるので，ある定数 $\theta_1<1$ と $\theta_2>1$ により，(θ_1,θ_2) と表される．また，問題(2)が実行可能内点を持てば $\theta_1<0$ であり，実行可能解を持たないならば $\theta_1>0$ である．そして，実行可能内点を持たないが実行可能解を持つときに $\theta_1=0$ である．主双対問題(6)が実行可能内点を持つとき，その問題に対するセンターパスが存在する．このセンターパス上の点は，定義より $(x(\mu,\theta),y(\mu,\theta),z(\mu,\theta))$ である．したがって，定理に述べられている結果が成立する．

センター $(x(\mu,\theta),y(\mu,\theta),z(\mu,\theta))$ が存在するようなパラメータの集合を

$$T=\{(\mu,\theta):\mu>0,\ \theta\in(\theta_1,\theta_2)\}$$

と定義する．集合 T は 2 次元平面上の開集合である．パラメータ (μ,θ) を T 上で動かすとき，センターの集合

$$S=\{(x(\mu,\theta),y(\mu,\theta),z(\mu,\theta)):(\mu,\theta)\in T\}$$

はなめらかな 2 次曲面を形成する．この 2 次曲面上の点列について，次の性質が明らかになっている（Mizuno et al. [37] 参照)．

定理 2　T 上の点列 $\{(\mu^k,\theta^k)\}$ について，$\mu^k\to 0$ かつ $\theta^k\to\theta\in(\theta_1,\theta_2)$ ならば $(x(\mu^k,\theta^k),y(\mu^k,\theta^k),z(\mu^k,\theta^k))$ は主双対問題(6)の解に近づき，$\mu^k\to\mu>0$ かつ $\theta^k\to\theta^1>-\infty$ ならば $(x(\mu^k,\theta^k),y(\mu^k,\theta^k),z(\mu^k,\theta^k))$ は発散する．$\mu^k\to 0$ かつ $\theta^k\to\theta^1>-\infty$ のとき，$\mu^k/(\theta^k-\theta^1)$ が有界ならば $(x(\mu^k,\theta^k),y(\mu^k,\theta^k),z(\mu^k,\theta^k))$ は $\theta=\theta^1$ のときの主双対問題(6)の解に近づく．

この定理は，曲面 S の境界の状態を明らかにしている．すなわち，パラメータ μ が T の境界に近づくときには，S 上の点が主双対問題(6)の解に近づき，パラメータ θ が T の境界に近づくときには，S 上の点が発散し，μ と θ が同程度の速度で境界に近づくときには，S 上の点が主双対問題(6)の解に近づくことを示している．

$\beta_1\in(0,1)$ を定数とするとき，センターの近傍

$$\begin{aligned}N(\mu,\theta)=\{(x,y,z):\ &Ax=b+\theta(Ax^0-b),\\&A^Ty+z=c+\theta(A^Ty^0+z^0-c),\\&\beta_1\mu e\leq Xz,\ x^Tz=n\mu\\&x>0,\ z>0\}\end{aligned}$$

を定義する．この近傍上の点についても，定理 2 に述べられているような性質が成り立つ．アルゴリズムで，この近傍上の点列 $\{(x^k,y^k,z^k)\in N(\mu^k,\theta^k)\}$ を生成したとする．このとき，定理 1 と 2 から，次の性質が成り立つ．主双対問題(2)に実行可能内点が存在するとき，$\mu^k\to 0$ かつ $\theta^k\to 0$ ならば，$\{(x^k,y^k,z^k)\}$ は問題(2)の解集合に近づく．問題(2)に解が存在しないとき，θ^k は $\theta_1>0$ より常に大きく，$\theta^k\to\theta_1$ かつ $\mu^k\to\mu>0$ ならば，$\{(x^k,y^k,z^k)\}$ は発散する．また，問題(2)に実行可能内点が存在しないが解が存在するとき，μ^k と θ^k が同じ程度の速度で 0 に収束するならば，$\{(x^k,y^k,z^k)\}$ は問題(2)の解集合に近づく．

5．大域的収束性

インフィージブル内点法で，主双対問題を解くために，前節の結果が役立つ．すなわち，センター曲面の近傍

$$N=\{(x,y,z)\in N(\mu,\theta):(\mu,\theta)\in T\}$$

上にアルゴリズムで点列を生成し，μ^k と θ^k がともに減少するようにコントロールする．このとき，θ^k が 0 に近づく前に点列が発散すれば主双対問題に解が存在しないことが判明し，点列が有界で，μ^k と θ^k が共に 0 に近づけば主双対問題の近似解を得られる．θ^k が 0 に近づきながら点列が発散すれば，主双対問題に実行可能内点が存在しないけれども，解が存在する．このとき，

θ^kとμ^kが同程度の速さで0に近づくようにコントロールすれば近似解を得られる．

初期点(x^0, y^0, z^0)は，$\theta=1$とした主双対問題(6)の実行可能内点である．したがって，$\mu^0=(x^0)^T z^0/n$に対して条件

$$\beta_1 \mu^0 e \leq X^0 z^0 \tag{7}$$

を満たせば，初期点はセンター曲面の近傍N上の点である．この不等式を満たすように初期点とβ_1を選ぶ．点(x^k, y^k, z^k)が$\theta=\theta^k$とした主双対問題(6)の実行可能内点であり，近傍N上の点であると仮定する．点(x^k, y^k, z^k)において方程式系(4)を解き，方向$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$を求めたとする．ステップサイズを主変数と双対変数で同じ値αにとり，次の点を

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})=(x^k, y^k, z^k)+\alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

とする．このとき，

$$Ax^{k+1}=b+(1-\alpha)\theta^k(Ax^0-b)$$
$$A^T y^{k+1}+z^{k+1}=c+(1-\alpha)\theta^k(A^T y^0+z^0-c)$$

が成立するので，$\theta^{k+1}=(1-\alpha)\theta^k$とすれば，$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$は$\theta=\theta^{k+1}$とした主双対問題(6)の実行可能解となる．したがって，$\mu^{k+1}=(x^{k+1})^T z^{k+1}/n$に対して，条件

$$\beta_1 \mu^{k+1} e \leq X^{k+1} z^{k+1} \tag{8}$$

を満たせば，点$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$もセンター曲面の近傍$N$上の点である．

次に，パラメータμ^kを減少させる条件を考える．パラメータμ^{k+1}の値は，αの2次式

$$\mu^{k+1}=(x^k+\alpha\Delta x)^T(z^k+\alpha\Delta z)/n$$

で表わされる．条件(4)を使えば，

$$n\mu^{k+1}=(x^k)^T z^k-\alpha((x^k)^T z^k-n\mu)+\alpha^2 \Delta x^T \Delta z$$

となる．この式より，$\mu<\mu^k=(x^k)^T z^k/n$のとき，十分小さなαに対して，μ^{k+1}はμ^kより減少する．$\Delta x^T \Delta z>0$ならばμ^{k+1}は$\alpha\geq 0$に関して単調に減少するが，$\Delta x^T \Delta z>0$ならばμ^{k+1}は$\alpha=.5((x^k)^T z^k-n\mu)/\Delta x^T \Delta z$のとき最小値をとる．

μ^kが0に収束するとき，θ^kが0に収束しないとすると，点列$\{(x^k, y^k, z^k)\}$は問題(2)の解に収束しない．そこで，θ^kも0に収束する条件として，定数$\gamma\geq 1$に対して不等式

$$\theta^k/\mu^k \leq \gamma\theta^0/\mu^0 \tag{9}$$

を考える．初期点でこの不等式は成立する．常にこの条件を満たすように点列を生成すれば，$\mu^k\to 0$ならば必ず$\theta^k\to 0$となる．以上の議論をまとめると，アルゴリズムは次のようなステップからなる．

大域的収束するインフィージブル内点法

ステップ0：$\beta_1\in(0,1)$と$\delta\in(0,1)$を定める．初期実行可能内点を$(x^0, y^0, z^0)\in N$とし，$\theta^0=1$，$\mu^0=(x^0)^T z^0/n$，$k=0$とする．

ステップ1：$\mu=\delta\mu^k$に対して，方程式系(4)の解$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$を計算する．

ステップ2：条件(8)と$k+1$に対して条件(9)を満たすというもとで，μ^{k+1}が最も減少するようにステップサイズ$\alpha>0$と次の点$(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})=(x^k, y^k, z^k)+\alpha(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$を計算する．$\theta^{k+1}=(1-\alpha)\theta^k$, $\mu^{k+1}=(x^{k+1})^T z^{k+1}/n$とする．

ステップ3：kを1増加して，ステップ1へいく．

このアルゴリズムは，Kojima et al.[9]により提案されたアルゴリズムを単純化したものであり，主双対問題を解くことができる．すなわち，このアルゴリズムで生成される点列が有界であれば必ずθ^kとμ^kが0に収束して近似解を得ることができ，発散すれば主双対問題に解が存在しないことが判明する．点列が発散しているかどうかを理論的にどのように判断するかといったことについては，文献[9]に詳しく説明されている．また，多項式オーダを達成するためには，初期点とステップサイズの決め方についてさらに工夫を加える必要がある．詳細については，Zhang[29]またはMizuno[17]を参照していただきたい．

6．インフィージブルセンターパス

前節までに解説したアルゴリズムは，センターパスP_1を追跡する．インフィージブル内点法では，P_1と異なるパスP_2を使う場合もある．パスP_1は，実行可能内点からなるので，主双対問題に実行可能内点が存在しない場合には存在しない．また，初期点はこのパスから大きく離れていることもありうる．一方，パスP_2は，初期点の近くを通り，主双対問題に解が存在する場合には最適解に収束し，解が存在しない場合には発散する．

初期内点(x^0, y^0, z^0)と$\mu^0=(x^0)^T z^0/n$に対して，パス

$$\begin{aligned}P_2=\{(x,y,z): &Ax=b+\theta(Ax^0-b),\\ &A^T y+z=c+\theta(A^T y^0+z^0-c),\\ &Xz=\mu e,\ \mu=\theta\mu^0,\ x>0,\ z>0\}\\ =\{(x(\mu,\theta),\ &y(\mu,\theta),\ z(\mu,\theta)): \mu=\theta\mu^0\}\end{aligned}$$

を定義する．明らかに，パスP_2はセンター曲面S上にある．初期点は，不等式(7)を満たせばセンターの近傍

$N(\mu^0, 1)$上にあり，$X^0z^0=\mu^0 e$を満たせばパスP_2上にある．定理1と2より，主双対問題に解が存在すれば，P_2は$\theta\to 0$のときに解に収束し，解が存在しなければ，$\theta\to\theta_1>0$のときに発散する．

7．プレディクタ・コレクタ法

プレディクタ・コレクタ法は，パスP_2を追跡するアルゴリズムであり，主双対問題を解くことができる．大きな初期点を使うことにより，多項式オーダのアルゴリズムとなる．また，問題に解が存在する場合には，局所的に超1次収束する．

初期内点と定数$\beta\in(0,1)$が与えられたときに，パスP_2の近傍

$$\begin{aligned}N_2(\beta)=\{(x,y,z):\ & Ax=b+\theta(Ax^0-b),\\ & A^Ty+z=c+\theta(A^Ty^0+z^0-c),\\ & \|Xz-\mu e\|\le\beta\mu,\\ & \mu=\theta\mu^0,\ x>0,\ z>0\}\end{aligned}$$

を定義する．$\beta_1=1-\beta$とすれば，この近傍はセンター曲面の近傍Nに含まれる．変数の次元nが大きな場合には，N_2はNよりもはるかに小さな集合である．この近傍N_2内の点列についても，パスP_2上の点列と同じような性質が成り立つ．初期点がこの近傍上にあるとする．

プレディクタ・コレクタ法は，μとθの値を減少させるプレディクタステップとパスP_2の近くに戻るコレクタステップを交互に行なうアルゴリズムである．2つの定数$\beta_2=.25$と$\beta_3=.5$を決める．プレディクタ・コレクタ法で生成される点列$\{(x^k,y^k,z^k)\}$は，小さな近傍$N_2(\beta_2)$に含まれる．しかし，プレディクタステップ後に計算される中間点は，少し大きな近傍$N_2(\beta_3)$上の点である．

第k反復目の内点$(x^k,y^k,z^k)\in N_2(\beta_2)$とパラメータ$\theta^k\in(0,1)$が得られているとして，次の点$(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})$とパラメータ$\theta^{k+1}\in(0,1)$の求め方を解説する．ここで，点$(x^k,y^k,z^k)$は$\theta=\theta^k$のときの主双対問題(6)の実行可能解とする．まずプレディクタステップにおいて，点(x^k,y^k,z^k)で主双対問題(2)にニュートン法を適用し，方向$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$を求める．この方向は，方程式系(4)において$\mu=0$のときに計算される方向である．ステップサイズ$\alpha$をもちいて中間点を

$$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})=(x^k,y^k,z^k)+\alpha(\Delta x,\Delta y,\Delta z) \tag{10}$$

と表わす．センターパスの近傍$N_2(\beta_3)$の外に出ない範囲で最も大きなステップサイズαを計算し，中間点と$\theta^{k+1}=(1-\alpha)\theta^k$, $\mu^{k+1}=\theta^{k+1}\mu^0$を求める．ここで，点$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$は$\theta=\theta^{k+1}$のときの主双対問題(6)の実行可能解となっている．

次にコレクターステップにおいて，点$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$で$\mu=\mu^{k+1}$, $\theta=\theta^{k+1}$のときのセンターを定義する方程式系(5)のニュートン方向$(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$を求める．この方向は，方程式系

$$\begin{aligned}&A\Delta x=0\\ &A^T\Delta y+\Delta z=0\\ &\hat{Z}\Delta x+\hat{X}\Delta z=-\hat{X}\hat{z}+\mu^{k+1}e\end{aligned} \tag{11}$$

の解である．ステップサイズを1に固定して，次の点

$$(x^{k+1},y^{k+1},z^{k+1})=(\hat{x},\hat{y},\hat{z})+(\Delta x,\Delta y,\Delta z) \tag{12}$$

を求める．このとき，点$(x^{k+1},\ y^{k+1},\ z^{k+1})$は$\theta=\theta^{k+1}$のときの主双対問題(6)の実行可能解となっている．さらに，Mizuno et al. [18] に示されている結果を使えば，$(x^{k+1},\ y^{k+1},\ z^{k+1})\in N_2(\beta_2)$も成立する．以上の議論から，プレディクタ・コレクタ法は次のように表わすことができる．

プレディクタ・コレクタ法

ステップ0：$\beta_2=.25$, $\beta_3=.5$, $k=0$とする．初期実行可能内点$(x^0,\ y^0,\ z^0)\in N_2(\beta_2)$を選び，$\theta^0=1$，$\mu^0=(x^0)^Tz^0/n$とする．

ステップ1：$\mu=0$に対して，方程式系(4)の解$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$を計算する．近傍$N_2(\beta_3)$から出ない最大のステップサイズ$\alpha$と中間点$(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$を(10)により求める．$\theta^{k+1}=(1-\alpha)\theta^k$, $\mu^{k+1}=\theta^{k+1}\mu^0$とする．

ステップ2：方程式系(11)の解$(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$を計算し，$(x^{k+1},\ y^{k+1},\ z^{k+1})$を(12)により求める．

ステップ3：kを1増加して，ステップ1へいく．

このプレディクタ・コレクタ法の理論的な結果として，次の定理が成立する．

定理3　主双対問題(2)解が存在するならば，プレディクタ・コレクタ法で生成される点列$\{(x^k,y^k,z^k)\}$は有界であり，その集積点は解である．主双対問題(2)に解が存在しないならば，点列$\{(x^k,y^k,z^k)\}$は発散する．

この定理により，プレディクタ・コレクタ法は，つねに主双対問題を解くことができる．点$\{(x^k,y^k,z^k)\}$が大きくなった場合には，理論的に最適解が存在しないような範囲を特定することができる．したがって，問題の実行不能性を点(x^k,y^k,z^k)の大きさで判断することができる．

初期点として十分大きなベクトルを使うことにより，

このアルゴリズムの反復回数を理論的に $O(nL)$ で抑えることができる．また，初期点が実行可能である場合には $O(\sqrt{n}L)$ 反復で問題を解くことができる．プレディクタ・コレクタ法で生成される点列が解に十分近づいた場合の点列の性質を解析することにより，局所的に超1次収束することも証明することができる．これらの理論的結果についてより詳しいことについては，たとえば Mizuno et al. [36] を参照して頂きたい．

8．おわりに

本論では，内点法として現在のところ実際に最もよく使われている主双対問題のインフィージブル内点法を解説した．インフィージブル内点法には，大きく分けて2種類のアルゴリズムがある．それは，実行可能内点よりなるセンターパス P_1 を使うアルゴリズムと実行不能内点よりなるセンターパス P_2 を使うアルゴリズムである．前者が実際問題を解くソフトウェアパッケージを作るという過程で提案されたアルゴリズムであるのに対して，後者は理論的に好ましい性質（多項式オーダ，超1次収束など）を持つアルゴリズムとして提案された．実際に効率のよいアルゴリズムと理論的に好ましいアルゴリズムの間にはまだギャップがあるが，インフィージブル内点法が理論的に解析されるようになり，そのギャップがかなり狭くなったように思う．

インフィージブル内点法は，英語で Infeasible-Interior-Point Methods と書く．英語を直訳すると実行不能内点法となるが，それでは実行不能な方法のように聞こえる．日本では，外点法と呼ばれることもあるが，今野・山下［13］に解説されている外点法とは異なるので，ここではインフィージブル内点法と名づけた．

参考文献

[36] Mizuno, S., Jarre, F., and Stoer, J. : "A Unified Approach to Infeasible-Interior-Point Algorithms via Geometrical Linear Complementarity Problems", Preprint 213, Mathematical Institute of Wuerzburg University, (1994) to appear in Applied Mathematics and Optimization.

[37] Mizuno, S., Todd, M. J., and Ye, Y. : "A Surface of Analytic Centers and Primal-Dual Infeasible -Interior-Point algorithms for Linear Programming", Mathematics of Operations Research 20 (1995) 135-162.

[38] Muramatsu, M. and Tsuchiya, T. :"An Affine Scaling Method with an Infeasible Starting Point", Research Memorandum 490, The Institute of Statistical Mathematics (1993).