出力値にファジィ数を用いたDEA

長野　史裕，山口　俊和，福川　忠昭

1.　はじめに

多入力多出力系の効率評価法に DEA(Data Envelopment Analysis)[1],[2] がある．DEA では測定する DMU(Decision Making Unit) の複数の入力値と複数の出力値から相対的な効率値（D 効率値）を求め，それらの総合評価を行う．

DEA は入出力値の実績値をもとにした各 DMU の評価に適用されている．来客数のように測定誤差が含まれる場合も存在するが，基本的には入出力値は確定値で与えている．ところが，DMU の来期の計画を DEA を用いて事前に評価するような場合には，計画入力値を確定値で与えることは比較的容易であるが，計画出力値の算定には様々な不確実性が伴うので，これを確定値で与えることはかなり難しい．

例えば，既存の DMU を統廃合して新たにできる DMU 群に DEA を適用して DMU の計画効率値を求めようとする場合には，継続している DMU に対して，実績値を考慮して確定値を計画入出力値に当てることは可能であるが，統廃合によって新たにできる DMU の計画出力値を確定値として与えることは困難な場合が多い．例えば2つの支店を合併して新たに1つの支店に統合したとすると，従業員，売場面積などの入力項目の計画値については統廃合計画に伴って確定している場合が多いが，売上高，利益などの出力項目の計画値は単純に 2 つの支店の実績値を合計して与えるというわけにはいかない．その場合，両者の実績値と種々の環境条件などを考慮して“だいたい～くらい”というような表現で計画出力値を与えることは可能であると考えられる．不確実性を考慮して計画出力値を求めるためのアプローチには種々のものがあるが，本論文では判断のあいまいさをファジィ数で表現するアプローチをとる．さらに，“だいたい～くらい”という数値を表現するファジィ数として，三角ファジィ数を用いることにする．三角ファジィ数は一種の三点見積もりに対応しているので，売上高等の予測に比較的使いやすく，また解析上の取り扱いも容易であるという性質がある．

従来の DEA モデルでは，入出力値はそれぞれ確定値で与えられているので，計画出力値がファジィ数で与えられる場合にそのまま対応することはできない．本論文では，出力値がファジィ数で与えられる DMU の効率評価を行うことのできる DEA モデル（ファジィ DEA）を提案し，ファジィD 効率値を定義し，ファジィ D 効率性を判定する方法を示す．

ながの　ふみひろ　東京理科大学大学院工学研究科
やまぐち　としかず　東京理科大学工学部
〒104 新宿区神楽坂 1-3
ふくかわ　ただあき　慶應義塾大学理工学部
〒223 横浜市港北区日吉 3-14-1
受理　94.10.14　再受理　95.1.9

2.　三角ファジィ数の定義と演算

“だいたい～くらい”というように意思決定者の判断のあいまいさを含む数値を表す方法にファジィ数による表記がある．ファジィ数とは，実数直線 R^1 上の正規かつ凸ファジィ集合で，特にメンバシップ関数が区分的に連続なものと定義される [3]．本研究では“だいたい a くらいの数”というファジィ数を～の記号をつけて，$\tilde{a}$と表すことにする．

本論文では，計画出力値にメンバシップ関数$\mu_{\tilde{a}}$が

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}0 & (x \le a^L)\\ \dfrac{x-a^L}{a^M-a^L} & (a^L<x<a^M)\\ 1 & (x=a^M)\\ \dfrac{a^U-x}{a^U-a^M} & (a^M<x<a^U)\\ 0 & (x \ge a^U)\end{cases} \tag{1}$$

で定義される三角ファジィ数$\tilde{a}$を用いる．（図1参照）
三角ファジィ数$\tilde{a}$はメンバシップ関数値が 0 になる

$a^L, a^U (a^L \le a^U)$ とメンバシップ関数が 1 になる a^M を用いて

$$\tilde{a} = (a^L, a^M, a^U) \tag{2}$$

と表される．だいたい a くらいの数は a^L, a^U である度合いが 0，a^M である度合いは 1 となる．a^L と a^M の間と，a^L と a^U の間で $\tilde{a}$ のメンバシップ関数は線形的に変化する．

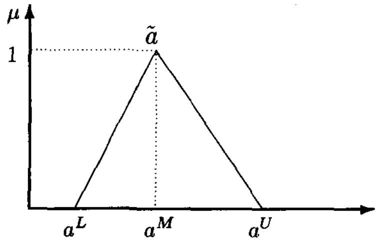

図 1: $\tilde{a}$ のメンバシップ関数

また，三角ファジィ数の演算は次のように定義されている [3].

定義 1 (ファジィ演算) *2* つの三角ファジィ数が $\tilde{a} = (a^L, a^M, a^U), \tilde{b} = (b^L, b^M, b^U)$ のように与えられたとき三角ファジィ数の和，スカラー倍は以下のようになる．

$$\tilde{a} + \tilde{b} = (a^L + b^L, a^M + b^M, a^U + b^U) \tag{3}$$

$$k\tilde{a} = (ka^L, ka^M, ka^U) \quad (k \ge 0) \tag{4}$$

3. DEA の基本的な定式化

DEA は，多入力多出力系の相対的な効率を分析する手法である．DEA では D 効率値という効率値を用いて DMU の効率性を評価する．

n 個の DMU は m 種類の入力と k 種類の出力を持つものとする．ただし，入力は小さい方が望ましく，出力は大きい方が望ましいものとする．$\mathrm{DMU}_j (j = 1, \ldots, n)$ の入出力値は正値で以下のように与えられているものとする．

入力値	x_{ij}	(i=1,. . . ,m)
出力値	y_{rj}	(r=1,. . . ,k)

DEA では分析対象とする DMU_a の効率を，

$$\frac{\text{出力値の加重和}}{\text{入力値の加重和}} = \frac{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia}} \tag{5}$$

と定義し，その値が最大になるようにウェイト付けをしたものを D 効率値と定義する．なお，v_i, u_r はそれぞれ入出力値 x_{ia}、y_{ra} にかかるウェイトである．D 効率値は次の【P1】の分数計画問題を解くことによって求めることができる．

【P1】

最大化

$$p_a = \frac{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia}} \tag{6}$$

制約条件

$$\frac{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

$$u_r \ge \varepsilon \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{8}$$

$$v_i \ge \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

【P1】の目的関数の分母を 1 に固定し，制約条件の分母を移項して出力最大化の線形計画問題に定式化しなおしたのが，【P2】である．

【P2】

最大化

$$\theta_a = \sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra} \tag{10}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia} = 1 \tag{11}$$

$$\sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

$$u_r \ge \varepsilon \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{13}$$

$$v_i \ge \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{14}$$

【P2】の最適目的関数値 θ_a^* が DMU_a の D 効率値となる．

4. ファジィDEA

4.1 ファジィDEAの定式化

本論文では，既存のDMUを統廃合して新たに生成されるDMU群にDEAを適用して，DMUの計画効率値を求めるような問題を想定し，各DMUの計画入力値を確定値x_{ij}，計画出力値を三角ファジィ数$y_{rj} = (y_{rj}^L, y_{rj}^M, y_{rj}^U)$とする．なお，計画出力値を確定値で与える場合は，$y_{rj}^L = y_{rj}^M = y_{rj}^U$とすればよい．

計画出力値が三角ファジィ数で与えられたDEAの出力最大化の定式化は【P3】のようになる．

【P3】
最大化

$$\tilde{\theta}_a = \sum_{r=1}^{k} u_r \tilde{y}_{ra} \tag{15}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia} = 1 \tag{16}$$

$$\sum_{r=1}^{k} u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{17}$$

$$u_r \geq \varepsilon \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{18}$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{19}$$

【P3】において，ファジィ数は(15)式と(17)式に含まれる．目的関数がファジィ数になるので,【P3】を解いて得られる最適目的関数値$\tilde{\theta}_a^* = (\theta_a^{L*}, \theta_a^{M*}, \theta_a^{U*})$はファジィ数となり，これをFD効率値とする．

4.2 ファジィ目的，ファジィ制約の取り扱い

【P3】を解くためのファジィ目的とファジィ制約の取り扱いについて示す，(15),(17)式のファジィ目的，ファジィ制約は以下のように2つの場合に分けて扱う．

1. $j = a$のDMUの場合
   $j = a$のDMUのファジィ数，FD効率値を最大化するというファジィ目的と，効率値が1以下であるというファジィ制約に入っている．図2において，ファジィ目的$\tilde{\theta}_a$がだいたい1である度合いを表すh_{1a}, h_{2a}を最大化することで$\tilde{\theta}_a$を最大化し，FD効率値を求める．ただし，制約条件からその値が1を超えることはないようにする．

2. $j \neq a$のDMUの場合
   $j \neq a$のDMUのファジィ数はその効率値が1以下であるというファジィ不等式の制約に入っている．左辺が右辺(= 0)を超えない度合いを表す図3のh_jを最大化することによりファジィ不等式の成り立つ度合いを最大化する．

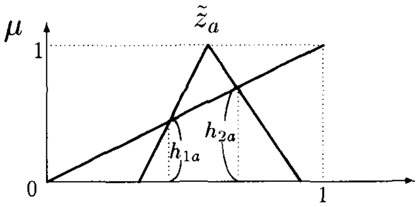

図 2: ファジィ目的

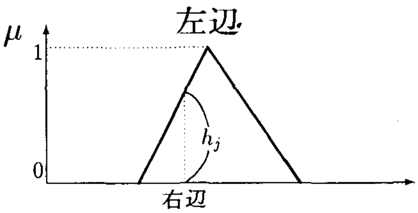

図 3: ファジィ制約

4.3 FD効率値を求める定式化

4.2節で述べた点を考慮に入れて，ファジィ目的がだいたい1である度合いと，ファジィ制約の成り立っている度合いを最大化するように定式化すると【P4】のようになる．

【P4】
最大化

$$h_{1a} = \frac{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^L}{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^L - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^M + 1} \tag{20}$$

$$h_{2a} = \frac{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^U}{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^U - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^M + 1} \tag{21}$$

$$h_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^L}{\sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^M - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^L} \tag{22}$$

$$(j = 1, \ldots, n; j \neq a)$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia} = 1 \tag{23}$$

$$h_{1a} \leq 1 \tag{24}$$
$$h_{2a} \leq 1 \tag{25}$$
$$h_j \leq 1 \quad (j = 1, \ldots, n; j \neq a) \tag{26}$$
$$h_{1a} \geq 0 \tag{27}$$
$$h_{2a} \geq 0 \tag{28}$$
$$h_j \geq 0 \quad (j = 1, \ldots, n; j \neq a) \tag{29}$$
$$u_r \geq \varepsilon \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{30}$$
$$v_i \geq \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{31}$$

【P4】は多目的計画問題である．この問題を解くのにはまず，h_{2a}とh_jの目的を「目的関数値の最小値を最大化する」という形で統合する．次に，h_{1a}をh_{2a}より優先する度合い$w(0 \leq w \leq 1)$を与え，h_{1a}とh_{2a}を統合する．これを定式化したのが【P5】である．

なお，$w = 0$のときはh_{2a}とh_jの最小値だけを最大化し，$w = 1$のときはh_{1a}とh_jの最小値だけを最大化することになる．

【P5】
最大化

$$\lambda_a \tag{32}$$

制約条件

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ia} = 1 \tag{33}$$
$$\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^U \geq \lambda_a (\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^U - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^M + 1) \tag{34}$$
$$\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^L \geq w \times \lambda_a (\sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^L - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{ra}^M + 1) \tag{35}$$
$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^L \geq \lambda_a (\sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^M - \sum_{r=1}^{k} u_r y_{rj}^L) \tag{36}$$
$$(j = 1, \ldots, n; j \neq a)$$
$$\lambda_a \leq 1 \tag{37}$$
$$\lambda_a \geq 0 \tag{38}$$
$$u_r \geq \epsilon \quad (r = 1, \ldots, k) \tag{39}$$
$$v_i \geq \epsilon \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{40}$$

この問題は非線形計画問題であるが，λ_aを固定することにより二分法とシンプレックス法の第1段階を用いて解くことができる．なお，$y^L = y^M = y^U$とすると，【P5】は一般のDEAの定式化と等価な式となる．

【P5】の最適解を(u_r^*, v_i^*)とすると，DMU_aのFD効率値は，

$$\tilde{\theta}_a^* = (\theta_a^{L*}, \theta_a^{M*}, \theta_a^{U*})$$
$$= (\sum_{r=1}^{k} u_r^* y_{ra}^L, \sum_{r=1}^{k} u_r^* y_{ra}^M, \sum_{r=1}^{k} u_r^* y_{ra}^U) \tag{41}$$

となる．

4.4 ファジィD効率性の判定

【P5】の最適目的関数値をλ_a^*とする．このλ_a^*はファジィD効率値$\tilde{\theta}_a$のインデックスとなっている．この値を用いてファジィD効率性を判定する．

定義2（ファジィD効率性） *λ_a^*が1となるDMUをファジィD効率的（FD効率的）なDMU，λ_a^*が1未満のDMUをファジィD非効率的（FD非効率的）なDMUとする．*

なお，FD効率値の上限(θ_a^{U*})は1を超えることがあるが，その場合は$\theta_a^{U*} = 1$とする．また，$\lambda_a^* = 1$となるDMUのFD効率値は$(1, 1, 1)$とする．

5. 数値例

ある企業では，従来15あった支店を統廃合により10の支店に整理した．新しくできる支店群の入出力項目の来期の数値を見積もり，効率評価を行うことを検討している．表1に示されているのは整理された10支店の計画入出力値である．このうち支店A〜支店Eは従来から継続している支店だが，支店F〜支店Jは統廃合によって再編成された支店である．入力は従業員数，売場面積で，出力は1日当たりの売上高，利益である．計画入力値は既存の支店については確定値であり，再編成された支店についても統廃合の段階で既に確定値となっているものとする．計画出力値は既存の支店については従来の実績から確定値として与えても差し支えないものとし，再編成された支店については統廃合前の実績や周辺の環境条件などを加味して"だいたい〜くらい"という三角ファジィ数で与えるものとする．

表 1: 各支店の入出力値

支店	従業員 (人)	売場面積 (m^2)	売上高 (万円)	利益 (万円)
A	10	400	52	12
B	32	630	78	17
C	10	500	65	15
D	20	620	74	23
E	10	340	22	7
F	15	650	(65,68,70)	(12,13,15)
G	39	750	(88,89,92)	(19,20,22)
H	15	500	(70,71,72)	(17,18,19)
I	25	870	(80,84,90)	(24,25,28)
J	5	250	(30,33,35)	(6,8,9)

表 1の計画入出力値を用い，$w = 0.7$ として【P5】を解いて得られたFD効率値を表 2に示す.

表 2: λ_a^*の値とFD効率値

支店	λ_a^*	FD効率値
A	0.951	0.951
B	0.873	0.873
C	0.986	0.986
D	1.000	1.000
E	0.581	0.581
F	0.767	(0.749,0.783,0.806)
G	0.834	(0.828,0.838,0.866)
H	1.000	(1.000,1.000,1.000)
I	0.802	(0.784,0.817,0.915)
J	0.987	(0.922,1.000,1.000)

この結果より，支店D,HがFD効率的であると判定される．支店Jは下限が1ではないのでFD効率的であるとはいえない.

6. おわりに

本論文では，統廃合などにより新たにできるDMUを評価するための手法として，計画出力値に三角ファジィ数を用いたDEAを提案し，FD効率値の導出法，およびFD効率性の評価法を示した．このファジィDEAにより，新たにできるDMUの計画出力値に意思決定者の判断のあいまいさを考慮することができるようになった．従来のDEAでは出力値が変化する可能性がある場合は，煩雑な感度分析を行う必要があったが，ファジィDEAを用いることにより容易に出力値の変化を考慮に入れた分析ができるようになった.

今後の課題としては，FD効率値を用いたファジィD効率性の評価，FD効率的なDMUの中での比較，実際の統廃合案の評価への適用，などが挙げられる.

参考文献

[1] 刀根薫:“企業体の効率性分析手法 —DEA入門— (1)~(5)”, オペレーションズ・リサーチ誌,pp.800-803,Vol.32,No.12(1987),pp.45-48,Vol.33,No.1(1988),pp.95-99,Vol.33,No2(1988),pp.150-151,Vol.33,No.3(1988),pp.191-198,Vol.33,No.4(1988)

[2] 刀根薫:「経営効率性の測定と改善 —包絡分析法DEAによる—」, 日科技連出版社 (1993)

[3] 坂和正敏:「ファジィ理論の基礎と応用」, 森北出版 (1989)

[4] 乾口雅弘,久米靖文:“Gödel含意を導入した様相制約条件計画問題と種々のファジィ数理計画問題”, システム制御情報学会論文誌, pp.382-pp.392,Vol.4,No.9(1991)

[5] 坂和正敏:“多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用”, 電子通信学会論文誌.pp.1182-1189,Vol.J65-A,No.11(1982)