論文・事例研究

繰り返し授業が行われる場合のクラス編成問題

矢島　安敏，小坂　栄之

1．はじめに

東京工業大学では，今年度から学部1年生に対しセミナー形式の講義を行なうことになった．筆者らの1類(理学部)でも，今年度後期に以下の要領で講義を行なうことにした．まず，後学期の14週間を7週毎の第1，第2の2つのラウンドに分割し，各ラウンドともにそれぞれ8クラス分の講義を開講する．講義は同一の内容で，第1ラウンドと第2ラウンドに繰り返し行なわれる．学生はラウンド毎に8クラスの中から1つを選択し受講する．ただし，同一のクラスを2回受講することはできないこととした．いいかえれば，学生は開講された8クラスのうち，2クラスを第1，第2，2つのラウンドで受講するのである．

各クラスには，あらかじめ受講者の定員が定められており，何らかの形で学生の希望を調べ，学生の希望がなるべく満たされ，かつ，各クラスの定員をオーバーすることがないように，第1ラウンドと第2ラウンドのクラス分けを行なう，という問題の解決にせまられた．

1つのラウンドだけに話を限れば，今野，朱[2]は，同様な問題を扱っており，別の講義科目でクラス編成に適用されている．彼らの方法は，学生に希望の度合に応じ0から100までの希望点をクラスにつけさせる．その上で，全学生の希望点の総和が最大になるようなクラス編成を，以下の線形計画問題で求めている．

学生の数を n，クラスの数を m，クラス j の定員を $a_j(j=1,2,\cdots,m)$，学生 i のクラス j に対する希望点を p_{ij} とする．変数 x_{ij} を

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{学生 } i \text{ をクラス } j \text{ に割り当てる}\\ 0, & \text{学生 } i \text{ をクラス } j \text{ に割り当てない}\end{cases}$$

と約束すれば，線形計画問題：

$$(P)\quad\left|\begin{array}{lll}\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}x_{ij} & \\ \text{条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}x_{ij}=1, & i=1,\cdots,n,\\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m}x_{ij}\le a_j, & j=1,\cdots,m,\\ & x_{ij}\ge 0, & i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m,\end{array}\right.$$

を解くことで，希望点の総和が最大となるクラス編成を求めることができる．

しかし，我々の問題の場合，以下の点を考慮しなくてはならない．第1に，学生は8クラスの中から異なる2クラスを受講する．第2に，その受講する2クラスのうち，どちらのクラスをどのラウンドで受講するかを，クラスの定員内に収まるように決めなくてはならない．あるいは，定員内で受講が可能なように，2クラスを選ばなくてはならないのである．

これに対し筆者らは，数理計画法と，グラフやネットワークフロー問題の性質を使うことで，上で述べた2つの点を考慮に入れたクラス編成を実践したので，ここに報告する．

2．問題のモデル化

2.1　ラウンドの区別をしないクラス分け

まずはじめに，前節で指摘した第1の考慮点についてのみ考えることとする．すなわち，いったん，第1，第2ラウンドの区別をしないこととし，クラスの定員を2倍にしたうえで，学生に8クラスの中から2クラスを割り振る．今野，朱[2]と同様に，学生に希望の度合に応じた希望点をクラスにつけさせ，全学生の希望点の総和が最大になるような割り振りを求める．こ

やじま　やすとし　東京工業大学　数理・計算科学専攻
こさか　ひでゆき　東京工業大学　数理・計算科学専攻
受付　95.3.31　採択　95.5.26

れには，問題（P）を少し変更し，

$$
(M)\left|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=2,\ i=1,\cdots,n, \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\leq 2\,a_j,\ \ j=1,\cdots,m, \\
 & 0\leq x_{ij}\leq 1,\ \ \begin{array}{l} i=1,\cdots,n, \\ j=1,\cdots,m, \end{array}
\end{array}\right.
$$

を解けばよい．この問題は2部グラフ上でのネットワークフローの問題であり，したがって，最適解として整数（この場合は0あるいは1）となるものを求めるアルゴリズム [1] が知られている．

2.2 ラウンド分け

しかし，前にも述べたように，問題（M）の解は，学生を異なる2つのクラスへは割り当てているものの，どちらをどのラウンドで受講するかを決定してはいない．さらに，クラス毎に見た場合は，受講する学生数は第1，第2ラウンド合わせて定員の2倍以下になっているものの，学生が選んでいるさまざまの2クラスの組合せを考慮にいれたうえで，学生をいずれかのラウンドへ割り振ることがはたして可能か考慮しなくてはならない．

これに関し，以下の定理が成り立つ．

定理 2.1 問題（M）の任意の0-1実行可能解に対し，学生を各ラウンドへ定員内の人数で割り振ることが可能である．すわち，学生が勝手に異なる2クラスを選択しても，そのクラス毎の受講者の合計が定員の2倍以下であれば，割り振りが可能である．

この定理を示すために，問題（M）の任意の整数解 x^0 に対し以下のようにグラフ $G(x^0)$ を定義し，ネットワークフロー問題を考える．学生 $1,\cdots,n$ にノード i を対応させ，このノードの集合を N_1，同様にクラス $1,\cdots,m$ にノード j を対応させ，このノードの集合を N_2 とする．$x^0_{ij}=1,(i\in N_1, j\in N_2)$ となるノード間に有効枝（i,j）を定める．さらに，2つのノード s, t を考え，すべてのノード $i,(i\in N_1)$ について有効枝（s, i）を，またすべてのノード $j,(j\in N_2)$ について有効枝（j,t）を加える．枝の流量はすべて非負で，枝（s, i），（$i\in N_1$）のフローは上限を1，また，枝（j,t），（$j\in N_2$）はフローの下限を $\lfloor \sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2 \rfloor$，上限を $\lceil \sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2 \rceil$ とする．

性質 2.2 グラフ $G(x^0)$ 上でノード s から t への最大流量は，n である．

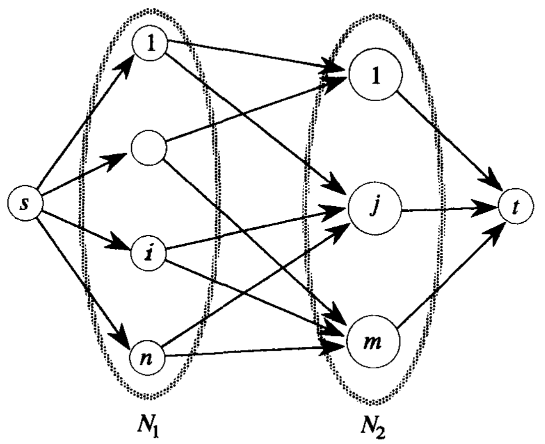

図1　グラフ $G(x^0)$

証明 切断集合 $\{(s,i)\mid i\in N_1\}$ の容量は n なので，最大流量は n 以下である．一方，x^0 が問題（M）の実行可能解であることより，枝（i, j）($\forall i\in N_1, \forall j\in N_2$) のフローを $x^0_{ij}/2$，枝（s,i），($\forall i\in N_1$) を1，また，枝（j,t），($\forall j\in N_2$) を $\sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2$ とすれば，s から t への流れで流量 n のものをグラフ G 上に作ることが可能である．　□

さらに，流量の上下限がすべて整数であることから，必ず整数の最大流が存在し，枝（i,j）($\forall i\in N_1, \forall j\in N_2$) のフローが0あるいは1となるものを，最大流のアルゴリズムで求めることができる．このとき，学生のノード $i(i\in N_1)$ では，2本の内の1本の枝のフローが1であり，クラスのノード $j(j\in N_2)$ を見れば，$\sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2$（$\sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}$ が奇数ならば $\lfloor \sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2 \rfloor$ か $\lceil \sum_{i=1}^{n} x^0_{ij}/2 \rceil$）本の枝のフローが1となっている．たとえば，フローが1である枝を第1ラウンド，フローが0である枝を第2ラウンドと考えれば，学生の割り振りが求まることとなる．したがって，定理2.1が示された．

2.3 K ラウンドの問題への拡張

我々の問題では，8クラスを2ラウンド繰り返すものであったが，一般に，m クラスを k ラウンド繰り返すことにしても，同様に考えることができる．

まず，クラスの定員をすべて k 倍し，希望点の総和が最大になるようすべての学生に異なる k 個のクラスを割り当てる．この問題は，(M) と同様に以下のように定式化できる．

$$
(\overline{M})\quad
\begin{array}{|lll}
\text{最大化} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_{ij} & \\
\text{条件} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=k, & i=1,\cdots,n, \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\le ka_j, & j=1,\cdots,m, \\
 & 0\le x_{ij}\le 1, & \begin{array}{l} i=1,\cdots,n, \\ j=1,\cdots,m. \end{array}
\end{array}
$$

この問題もやはり，ネットワークフロー問題であるから，最適解として整数（この場合は0あるいは1）の値をとるものを簡単に求めることができる．

また，問題 $(\overline{M})$ の整数解を x^0 とすれば，やはり，最大流問題を解くことで，次のようにラウンド分けを求めることができる．グラフ $G(x^0)$ と同様にグラフ $G^k(x^0)$ を定義し $G^k(x^0)$ 上で以下のように s から t への最大流問題を考える．枝の流量はすべて非負で，枝 $(s, i), (i\in N_1)$ のフローは上限を1，また，枝 $(j, t), (j\in N_2)$ はフローの下限を $\lfloor \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^0/k \rfloor$，上限を $\lceil \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^0/k \rceil$ とする．先ほどと同様な証明を行なえば，最大流量はやはり n であり，その時のフローの値が0か1となるものを求めることが可能である．このとき，フローが1となった枝に注目すれば，学生のノードからはちょうど1本，また，クラスのノード j へは高々 a_j 本であるので，この枝を（たとえば第1ラウンドの）クラス編成とすることができる．同時に，枝の流量に下限があったことを考慮すると，クラスのノード j では高々 $(k-1)a_j$ 本の枝がフロー0になっているのみである．そこで，フロー1の枝を取り除いたグラフを $G^{k-1}(x^0)$ と定義すれば，$G^k(x^0)$ と同じ構造を持ったグラフが得られので，再び最大流問題を解き，別のラウンドのクラス編成を求めることができる．

この，操作を k-1回繰り返せば，k ラウンドのクラス編成を求めることが可能である．特に，k が2の場合に限り，クラス編成をさらに容易に求めることが可能であるので，それについて次の節で述べる．

2.4 クラス編成の別解法

前節では，問題 (M) の解から実際のクラス編成を最大流問題の解として求めた．しかし，$k=2$ の場合，グラフの性質を使えば，もっと簡単な方法で学生をラウンドに分けることが可能である．まず，グラフ $G(x^0)$ の部分グラフで，ノード集合 N_1, N_2 と，その間の枝だけからなる2部グラフ $G'(x^0)$ を考える．話しを簡単にするために，N_2 の各ノードの次数は偶数であると仮定する．このとき，N_1 の各ノードの次数はすべて2であるので，$G'(x^0)$ が連結であればオイラーサイクルが存在する．また，グラフが2部グラフであることからサイクルの長さは必ず偶数である．そこで，サイクルに沿って枝を交互に第1ラウンド，第2ラウンドと区別すれば，クラス編成が求まる．もちろん，グラフが連結でない場合でも，連結成分それぞれについて同様な枝の区別ができる．

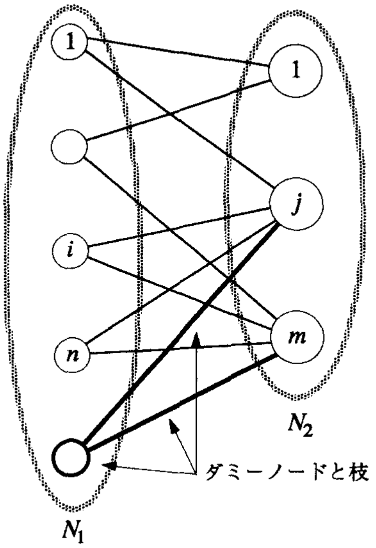

図2　グラフ $G'(x^0)$

次に，N_2 のノードの次数が奇数の場合を考える．枝の総数は偶数なので，次数が奇数のノードは偶数個ある．そこで，奇数次のノード2個を適当に組にし，同時にその組の数分ダミー学生のノードを N_1 に加える．ダミーの学生ノードに2本枝を付け，上で組にしたクラスのノード2つととそれぞれ結べば，N_2 のノードの次数はすべて偶数となる．(図2の太丸と太線がそれぞれダミーのノードと枝) 明らかにこれはオイラーグラフである．オイラーサイクルに沿って同様に枝を第1ラウンド第2ラウンドと区別すればよい．

3．実際のクラス編成

筆者らの手法を，平成6年度のクラス編成に実際適用したので，その結果を報告する．

まず，理学部の1年生約230名に数学，物理，化学，情報，応用物理，地球惑星，原子炉，総合理工の各学科・専攻が開講する8クラスに1点から9点までの希望点をつけてもらい，問題 (M) の p_{ij} とした．今回の場合，クラスの定員はすべて同じで30名である．学生には，希望点の総和が最大となるように2つのクラスを割り振ることを告げ，希望点のつけ方に関してはな

にも制約を設けなかった．たとえば，1クラスのみ9点であとはすべて1点とつけた学生も数名いた．**表1**は，縦にクラス，横に得点をとり，クラス毎に1から9点までにそれぞれ何人の学生が得点をつけたかを示したものである．また，**表2**は実際に割り振られた学生数の分布，および最後の列にクラス人数の合計を示した．

表1を見ると，第8クラスを除けば比較的希望は分散しており，学生の希望に沿ったクラス編成ができることが期待される．実際，割り振られた結果，すべての学生で希望点の高い方から3番目までのクラスに割り振られ，よい結果となった．

表1: クラス・希望点別の学生数の分布

	1点	2点	3点	4点	5点	6点	7点	8点	9点
1	80	17	22	11	15	17	19	13	25
2	114	16	21	6	12	9	7	5	29
3	80	13	19	10	12	12	16	15	42
4	106	14	17	2	13	15	11	11	30
5	106	12	11	11	15	12	7	6	39
6	80	17	13	11	15	9	19	17	38
7	93	21	20	13	10	15	11	15	21
8	46	9	10	12	16	12	16	13	85

表2: 実際に割り当てられた学生数の分布

	1点	2点	3点	4点	5点	6点	7点	8点	9点	合計
1	0	1	0	0	3	7	12	12	25	60
2	9	2	1	0	1	1	2	3	29	48
3	0	0	1	0	0	1	9	10	39	60
4	0	0	1	0	3	3	6	10	30	53
5	0	0	0	0	3	4	4	6	39	56
6	0	0	0	1	2	0	8	12	37	60
7	0	1	0	0	1	1	5	12	21	41
8	0	0	0	0	0	0	0	6	54	60

4．まとめ

本稿では，何回か繰り返し講義が行なわれる場合のクラス編成問題を，グラフやネットワークフローの問題として定式化できることを示し，それを実際の講義に適用し，クラス編成を行なった結果を紹介した．

特に，定理2.1およびそのkラウンド問題への拡張は，希望する点でなく，学生が希望するクラスをk個のみ申告した場合，クラス毎の申告者数をkで割り，切り上げた数をクラスの定員とすれば，学生の申告の組合せがどんなものであっても，常にkラウンドへの割り振りが存在することを示しており，また，その組合せは最大流問題を解くことで求まることを示している．

今回の場合，仮に9点をつけたクラスのみを真に希望する2クラスであったと解釈すれば，第8クラスに9点をつけた人数85／2＝42.5より，クラスの定員を43人とすれば，真に希望するクラスの講義を全員の学生が受講できることになる．

今回のクラス編成では，定員を30人に固定しており，また，学生の希望点の付け方にも，「真に希望する2クラスに9点をつける」といった制限はなにも設けなかった．今後は，今野ら[2]で行なっている定員に柔軟性を持たせるための，パラメトリックな分析等も試みたい．

参考文献

[1] 伊理正夫，古林　隆：「ネットワーク理論」，日科技連出版社，1976.

[2] 今野　浩，朱喆：“最適クラス編成問題－東京工業大学におけるケース・スタディ－－”，オペレーションズ・リサーチ，36，85-89，(1991).