解　説

内点法(2) —実行可能な初期点を使う場合—

水野　眞治

1．はじめに

内点法で線形計画問題を解くときには，主問題を解く場合，双対問題を解く場合，主双対問題を解く場合がある．標準型の線形計画問題は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^T x \\ \text{制約条件} & Ax=b,\ x\geq 0 \end{array} \tag{1}$$

と表わされる．ここで，x，$c \in R^n$ (n 次元のユークリッド空間)，$b \in R^m$であり，A は mn 行列である．行列 A の階数（ランク）が m であると仮定する．任意の線形計画問題は，簡単な操作によりこの標準型に変換できる．これを主問題とするとき，その双対問題は，変数 $y \in R^m$とスラック変数 $z \in R^n$をもちいて

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & b^T y \\ \text{制約条件} & A^T y+z=c,\ z\geq 0 \end{array} \tag{2}$$

と表わされる．双対定理により，主問題が最適解 x^*を持つならば，双対問題も最適解（y^*, z^*）を持ち，2つの問題の最適値が等しい．このとき

$$\begin{aligned} x^{*T}z^* &= x^{*T}(c-A^Ty^*) \\ &= c^Tx^*-b^Ty^* \end{aligned}$$

により，$x^{*T}z^*=0$ が成立する．$x^*\geq 0$ かつ $z^*\geq 0$ であるので，$x^{*T}z^*=0$ より任意の要素番号 i に対して $x_i^* z_i^*=0$ が成立する．表現を替えれば，ベクトル x^*の要素 x_i^*を対角要素とする $n\times n$ 行列を $X^*=\mathrm{diag}(x^*)$ とするとき，$X^*z^*=0$ が成立する．逆に問題(1)と(2)の制約条件と $Xz=0$ を満たす x と (y,z)は，それぞれの問題の最適解である．したがって，条件

$$\begin{array}{l} Ax=b \\ A^Ty+z=c \\ Xz=0 \\ x\geq 0,\ \ z\geq 0 \end{array} \tag{3}$$

を満たす変数ベクトル (x,y,z) を求めれば，主問題と双対問題を同時に解くことができる．この条件(3)を満たす (x,y,z) を求める問題を主双対問題という．

主問題と双対問題の制約条件を満たすベクトル x と (y,z) をそれぞれの問題の実行可能解と呼び，そのときの (x,y,z) を主双対問題の実行可能解と呼ぶ．また $x>0$ かつ $z>0$ のとき，x を主問題の内点，(y,z) を双対問題の内点，(x,y,z) を主双対問題の内点と呼ぶ．実行可能な内点を実行可能内点という．本論では線形計画問題の内点法を実行可能初期内点が利用可能な場合について解説する．アルゴリズムとして，アフィンスケーリング法，射影変換法（カーマーカー法），パス追跡法，ポテンシャル減少法を取り上げる．

2．アフィンスケーリング法

主問題を解くアフィンスケーリング法をはじめに解説し，それから双対アフィンスケーリング法と主双対アフィンスケーリング法を解説する．主問題の実行可能内点 x^0が既知であると仮定する．アルゴリズムでは点 x^0を初期点として実行可能内点列 $\{x^k : k=0,\cdots\}$ を生成するので，第 k 番目の点 x^kが得られていると仮定して，x^{k+1}の求め方を示す．

実行可能内点 x^kで探索方向Δx を計算し，あるステップサイズ $\alpha>0$ を定めて，$x^{k+1}=x^k+\alpha\Delta x$ とする．このとき x^{k+1}も実行可能内点であり，目的関数値が減少する（$c^T x^{k+1}<c^Tx^k$）ように，探索方向とステップサイズを求めなければならない．その条件は，

$$A\Delta x=0 \tag{4}$$

$$x^k+\alpha\Delta x>0 \tag{5}$$

みずの　しんじ　文部省　統計数理研究所
〒106 東京都港区南麻布 4－6－7

$$c^T\Delta x < 0 \tag{6}$$

である．効率よいアルゴリズムとするためには，目的関数の減少量$-\alpha c^T\Delta x$をなるべく大きくする必要がある．そのためにステップサイズαの値を大きくしたい．αは(5)を満たさなければならない．もしベクトルx^kのある要素$x_i^k>0$の値が小さく，$-\Delta x_i$の値が大きいならば，αの値は小さくならざるをえない．そこで，現在の点の各要素の値が一定になるようにアフィン変換を行なった後に目的関数値が減少する方向を求めればステップサイズαを大きくとれるのではないかと考えられる．そのために，対角行列$X^k=\mathrm{diag}(x^k)$を使い新しい変数ベクトル$\bar{x}=(X^k)^{-1}x$を定義する．このとき，現在の点は$\bar{x}^k=(X^k)^{-1}x^k=e$に変換され，主問題(1)は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \bar{c}^T\bar{x} \\ \text{制約条件} & \bar{A}\bar{x}=b,\ \bar{x}\geq 0 \end{array} \tag{7}$$

と表わされる．ここで，$e=(1,1,\cdots,1)^T$，$\bar{c}=X^kc$，$\bar{A}=AX^k$である．現在の実行可能内点が$\bar{x}^k=e$であるので，$\|\Delta\bar{x}\|\leq 1$を満たす任意のベクトルに対して，$\bar{x}^k+\Delta\bar{x}\geq 0$が成立する．そこで，問題(7)において，$\bar{x}=\bar{x}^k+\Delta\bar{x}$として，非負条件$\bar{x}\geq 0$を条件$\|\Delta\bar{x}\|\leq 1$に置き換えた問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \bar{c}^T\Delta\bar{x}+\bar{c}^T\bar{x}^k \\ \text{制約条件} & \bar{A}\Delta\bar{x}=0 \\ & \|\Delta\bar{x}\|\leq 1 \end{array} \tag{8}$$

を考える．この問題は解析的に簡単に解くことができ，その解は

$$\Delta\bar{x}=-\frac{1}{\omega}(I-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})\,\bar{c}$$

と表わされる．ここで，$\omega=\|(I-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})\,\bar{c}\|$であり，$I$は単位行列を表わす．このとき，$\omega=0$ならば$\bar{x}^k$が問題(7)の最適解，すなわち，$x^k$が主問題(1)の最適解である．そうでないならば，$\Delta\bar{x}$が計算でき，$\Delta x=X^k\Delta\bar{x}$は条件(4), (6)を満たす探索方向である．このとき条件(5)を満たすステップサイズの上限を

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}&=\max\{\alpha : x^k+\alpha\Delta x\geq 0\}\\ &=\max\{\alpha : X^k(e+\alpha\Delta\bar{x})\geq 0\}\\ &=1/\max\{0,\max\{-\Delta\bar{x}_i\}\}\end{aligned}$$

とすれば，$\bar{\alpha}\geq 1$が成立する．この上限が存在しない$(\Delta\bar{x}\geq 0)$とき，主問題の目的関数がいくらでも小さくできるので，最適解は存在しない．アフィンスケーリング法で使うステップサイズは，ある定数$\lambda\in(0,1)$に対して$\alpha=\lambda\bar{\alpha}$とする．以上の議論から主問題を解くアフィンスケーリング法は次の手順から成る．

主アフィンスケーリング法

ステップ0：初期実行可能内点をx^0とし，$k=0$とする．$\lambda\in(0,1)$を定める．

ステップ1：連立1次方程式

$$A(X^k)^2A^T\bar{y}=A(X^k)^2c$$

の解$\bar{y}$を計算する．$\omega=\|X^k(c-A^T\bar{y})\|$，$\Delta\bar{x}=-(1/\omega)X^k(c-A^T\bar{y})$，$\Delta x=X^k\Delta\bar{x}$を求める．最大ステップサイズ$\bar{\alpha}$を上記の計算式により求め，$\alpha=\lambda\bar{\alpha}$に対して$x^{k+1}=x^k+\alpha\Delta x$とする．ここで$\omega=0$ならば$x^k$は最適解であり，$\bar{\alpha}=\infty$ならば最適解は存在しない．

ステップ2：kを1つ増加して，ステップ1へいく．

双対問題の場合には，第k反復の内点を(y^k, z^k)，$\Delta z=z-z^k$とするとき，主問題の場合と同様に問題(2)における非負条件$z\geq 0$を条件$\|(Z^k)^{-1}\Delta z\|\leq 1$に置き換えた問題を考える．その結果，双対アフィンスケーリング法の手順は，次のように表わされる．

双対アフィンスケーリング法

ステップ0：問題(2)の初期実行可能内点を(y^0, z^0)とし，$k=0$とする．$\lambda\in(0,1)$を定める．

ステップ1：連立1次方程式

$$A(Z^k)^{-2}A^T\bar{y}=b$$

の解$\bar{y}$を計算する．$\omega=\|(Z^k)^{-1}A^T\bar{y}\|$，$\Delta y=(1/\omega)y$，$\Delta z=-(1/\omega)A^T\bar{y}$を求める．最大ステップサイズ$\bar{\alpha}=1/\max\{0,\max\{-\Delta z_i/z_i^k\}\}$を求め，$\alpha=\lambda\bar{\alpha}$に対して$(y^{k+1}, z^{k+1})=(y^k, z^k)+\alpha(\Delta y, \Delta z)$とする．ここで$\omega=0$ならば$(y^k, z^k)$は最適解であり，$\bar{\alpha}=\infty$ならば最適解が存在しない．

ステップ2：kを1つ増加して，ステップ1へいく．

双対アフィンスケーリング法の大域的収束性は，Tsuchiya and Muramatsu [26][1]によって示された．それによれば，上記の双対アフィンスケーリングにおいて$\lambda\leq 2/3$ならば点列$\{(y^k, z^k)\}$が最適解に収束するか，あるいは数列$\{b^Ty^k\}$が発散する．したがっ

[1]文献［1］から［29］は，内点法(1)を参照すること．

て，双対問題に最適解が存在すれば最適解に収束し，存在しなければ発散する．主アフィンスケーリング法についても，同様な結果が得られる．Mascarenhas [33] は，$\lambda=0.999$ のときに点列が最適解に収束しない例題が存在することを示した．

主双対アフィンスケーリング法は，主双対問題へのニュートン法と見なせる．第 k 番目の実行可能内点 (x^k, y^k, z^k) が既知のときに，主双対問題(3)の等式制約に対するニュートン方向 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ は，連立1次方程式

$$\begin{aligned} &A\Delta x=0 \\ &A^T\Delta y+\Delta z=0 \\ &Z^k\Delta x+X^k\Delta z=-X^kz^k \end{aligned} \tag{9}$$

の解である．この解を計算し，主問題の変数 x と双対問題の変数 (y, z) の最大ステップサイズをそれぞれ

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_x&=\max\{\alpha : x^k+\alpha\Delta x\geq 0\} \\ \bar{\alpha}_z&=\max\{\alpha : z^k+\alpha\Delta z\geq 0\} \end{aligned} \tag{10}$$

とする．定数 $\lambda\in(0, 1)$ を使い，ステップサイズを $\alpha_x=\lambda\bar{\alpha}_x$ と $\alpha_z=\lambda\bar{\alpha}_z$ とする．以上の議論をまとめると，つぎのアルゴリズムが得られる．

主双対アフィンスケーリング法

ステップ0：主双対問題(3)の初期実行可能内点を (x^0, y^0, z^0) とし，$k=0$ とする．$\lambda\in(0, 1)$ を定める．

ステップ1：連立1次方程式(9)の解 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ を計算する．$\bar{\alpha}_x$ と $\bar{\alpha}_z$ を(10)により求め，$\alpha_x=\lambda\bar{\alpha}_x$，$\alpha_z=\lambda\bar{\alpha}_z$ とする．次の点を $x^{k+1}=x^k+\alpha_x\Delta x$, $(y^{k+1}, z^{k+1})=(y^k, z^k)+\alpha_z(\Delta y, \Delta z)$ とする．

ステップ2：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

上記のアルゴリズムによって生成される点列が最適解に収束するかどうかについては，理論的にまだわかっていない．しかし，Monteiro et al. [35] と Mizuno and Nagasawa [34] は，ステップサイズをうまくコントロールすることにより，多項式オーダの反復回数で最適解に十分近い近似解（簡単な線形演算で最適解を計算できる近似解）を計算できることを示した．

3．射影変換法

射影変換法は Karmarkar [7] により提案された．アフィンスケーリング法がアフィン変換により現在の点を中心点 e に移動するのに対して，この方法は射影変換を使う．射影変換により定義域と値域が変化しないように，Karmarkar は単体

$$S=\{x\in R^n : x\geq 0, e^Tx=1\}$$

を定義域とした．S の内点 $x^k>0$ が既知のとき，射影変換

$$T(x)=\frac{(X^k)^{-1}x}{e^T(X^k)^{-1}x}$$

を定義する．この変換は，x^k を単体 S の中心 $(1/n)e$ に写し，定義域 S 全体を S 全体に1対1で写す．逆変換は，$\bar{x}\in S$ に対して

$$T^{-1}(\bar{x})=\frac{X^k\bar{x}}{e^TX^k\bar{x}}$$

と表わされる．この射影変換を使うために，実行可能領域が部分空間と単体 S の交わりとして表わされる線形計画問題

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad c^Tx \\ &\text{制約条件} \quad Ax=0 \\ &\qquad\qquad\quad e^Tx=1,\ x\geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

を対象とする．Karmarkar は，さらにこの問題の最適値が0であり，$Ae=0$ となることを仮定した．一般の線形計画問題をこの形に変換する方法については，Karmarkar [7] の他に，Goldfarb and Todd [3]，今野 [12] などを参照していただきたい．

仮定より，$x^0=(1/n)e$ は実行可能内点である．第 k 番目の実行可能内点 x^k が得られているとする．変数 $\bar{x}=T(x)$ を使えば，線形計画問題(11)は $x=T^{-1}(\bar{x})$ を代入することにより，

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \frac{\bar{c}^T\bar{x}}{e^T(X^k)\bar{x}} \\ &\text{制約条件} \quad \bar{A}\bar{x}=0 \\ &\qquad\qquad\quad e^T\bar{x}=1,\ \bar{x}\geq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

と表わされる．ここで，$\bar{c}=X^kc$，$\bar{A}=AX^k$ である．最適値が0であるので，目的関数の分母 $e^T(X^k)\bar{x}$ を取り払うことができる．制約の等式条件 $\bar{A}\bar{x}=0$ と $e^T\bar{x}=1$ をまとめて $B\bar{x}=b$ と表わせば，

$$\begin{aligned} &\text{最小化} \quad \bar{c}^T\bar{x} \\ &\text{制約条件} \quad B\bar{x}=b,\ \bar{x}\geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

という標準型の線形計画問題が得られる．$\bar{x}^k=T(x^k)=(1/n)e$ が実行可能解であるので，主アフィンスケーリング法の場合と同様に $\Delta\bar{x}=\bar{x}-\bar{x}^k$ として，不等式 $\bar{x}\geq 0$ を条件 $\|\Delta\bar{x}\|\leq 1/n$ に置き換えた問題

を解くことにより，探索方向

$$\Delta\bar{x}=-\frac{1}{n\omega}(I-B^T(BB^T)^{-1}B)\bar{c} \tag{14}$$

を求める．ここで $\omega=\|(I-B^T(BB^T)^{-1}B)c\|$ である．適当なステップサイズ $\alpha>0$ を使い $\bar{x}^{k+1}=\bar{x}^k+\alpha\Delta\bar{x}$ を求め，$x^{k+1}=T^{-1}(\bar{x}^{k+1})$ を問題(11)の次の実行可能内点とする．以上の議論をまとめれば，射影変換法の手順は次のように表わされる．

射影変換法

ステップ0：初期実行可能内点を $x^0=(1/n)e$ とし，$k=0$ とする．$\lambda\in(0,1)$ を定める．

ステップ1：$\Delta\bar{x}$ を(14)により計算し，ステップサイズ α を決め，$\bar{x}^{k+1}=(1/n)e+\alpha\Delta\bar{x}$ と $x^{k+1}=T^{-1}(\bar{x}^{k+1})$ を求める．

ステップ2：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

この射影変換法は，$\alpha=1/3$ とするとき，$O(nL)$ 反復で

$$c^Tx^k\leq 2^{-L}$$

を満たす実行可能解を求めることができる多項式オーダのアルゴリズムである．ここで，L が問題のすべてのデータを計算機に記述するのに必要なビット数を表わすとすれば，この不等式を満たす実行可能解から目的関数を増加させないように端点まで移動することにより最適解を得ることができる．

4．パス追跡法

線形計画問題の実行可能領域の内部にセンターパスと呼ばれるなめらかなパスが存在し，このパスの一方の端点が最適解となっている．パス追跡法は，センターパスを追跡することにより，最適解の近似解を求める方法である．

n 次元ユークリッド空間の正象限 $R^n_+=\{x\in R^n: x\geq 0\}$ の対数罰金関数を

$$p(x)=-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \tag{15}$$

とする．これは，R^n_+ の内部を定義域とし，x がその境界に近づくときに発散する強凸関数である．線形計画問題(1)の目的関数にパラメータ $\mu>0$ を重みとして罰金関数 p を加えた問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & c^Tx+\mu p(x) \\ \text{制約条件} & Ax=b,\ x>0 \end{array} \tag{16}$$

を考える．これは凸計画問題である．問題(1)に実行可能内点と最適解が存在し，最適解の集合が有界であると仮定する．このとき，問題(16)は唯1つの最適解を持つ．問題(16)の最適条件は，制約条件 $Ax=b$ のラグランジュ変数を $y\in R^m$ とすれば

$$\begin{array}{l} Ax=b \\ c-\mu X^{-1}e-A^Ty=0 \\ x>0 \end{array} \tag{17}$$

と表わされる．$z=\mu X^{-1}e$ とすれば，

$$\begin{array}{l} Ax=b, \\ A^Ty+z=c \\ Xz=\mu e \\ x>0,\ z>0 \end{array} \tag{18}$$

と書き換えられる．この条件を満たす解を $(x(\mu),y(\mu),z(\mu))$ とする．$x(\mu)$ は凸計画問題(16)の唯一つの解であり，センターと呼ばれる．任意の $\mu>0$ に対して，センター $x(\mu)$ が唯1つ存在するので，集合 $P=\{x(\mu):\mu>0\}$ はパスになる．これを主問題のセンターパスと呼ぶ．問題(18)の条件は，$\mu\to 0$ のときに主双対問題(3)に一致する．このことから推察できるように，$\mu\to 0$ のとき $x(\mu)$ は主問題(1)の最適解に収束し，$(y(\mu),z(\mu))$ は双対問題(2)の最適解に収束する．

パス追跡アルゴリズムは，初期パラメータ値 $\mu^0>0$ とセンター $x(\mu^0)$ の近似点 x^0 が与えられたとき，数列 $\{\mu^k\}$ が0に収束するように μ^k を更新するステップとその μ^k に対する問題(16)の最適解 $x(\mu^k)$ の近似点 x^k を求めるステップをから成る．このとき，μ^k が十分小さくなれば，得られた近似点 x^k は問題(1)の近似解となる．

主問題のパス追跡法

ステップ0：初期実行可能内点を x^0 とし，$k=0$ とする．$\mu^0>0$ を定める．

ステップ1：x^k を初期点として，$\mu=\mu^k$ のときの問題(16)の近似解 x^{k+1} を求める．

ステップ2：$\mu^{k+1}\in(0,\mu^k)$ を定める．

ステップ3：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

このときのパラメータ μ^k の更新方法と問題(16)の近似解法についてはさまざまな方法が提案されている．詳細については，Gonzaga [4] に各種のパス追跡法が要領よくまとめられている．理論的な結果としては，定数 $\gamma>0$ に対して $\mu^{k+1}=(1-\gamma/\sqrt{n})\mu^k$ として，ニュートン法を使い問題(16)の近似解を求めることにより，反復回数を $O(\sqrt{n}L)$ とすることができる．

双対問題のパス追跡法では，変数 z に対して罰金関数 $p(z)$ を使うことにより，問題

$$\begin{array}{ll}\text{最大化} & b^Ty-\mu p(z) \\ \text{制約条件} & A^Ty+z=c,\ \ z>0\end{array} \tag{19}$$

を考える．この問題の最適条件は，制約条件 $A^Ty+z=c$ のラグランジュ変数を $x\in R^n$ とすれば，主問題の場合と同様に(18)で表わされる．したがって，問題(19)の最適解は $(y(\mu), z(\mu))$ であり，双対問題のセンターパスは $\{(y(\mu), z(\mu)) : \mu>0\}$ と表わされる．主問題の場合と同様にしてこのパスを追跡するアルゴリズムを構築することができる．

主双対問題のセンターパスは，問題(18)の解 $(x(\mu), y(\mu), z(\mu))$ の集合として定義される．この場合のパス追跡法では，μ を更新した後に問題(18)の等式制約に直接ニュートン法を適用することにより，センターの近似点を求めることができる．Kojima et al. [31] は，ある定数 $\gamma>0$ に対して $\mu=(1-\gamma/\sqrt{n})x^Tz/n$ とするとき，反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることを示した．

5．ポテンシャル減少法

ポテンシャル関数は，Karmarkar [7] により導入された．Karmarkar は，射影変換と組み合わせるアルゴリズムを提案したが，ここでは射影変換を使わないポテンシャル減少法を解説する．

主問題の最適値 v^* の下界値 v が既知であると仮定する．この下界値と定数 $q>n$ を使い主問題のポテンシャル関数

$$f_v(x)=q\ln(c^Tx-v)+p(x)$$

を定義する．ここで $p(x)$ は(15)で定義された罰金関数である．ポテンシャル減少法は，下界値 v を更新するステップとポテンシャル関数値を減少させるように点を更新するステップから成る．

主問題のポテンシャル減少法

ステップ 0：初期実行可能内点を x^0 とし，$k=0$ とする．最適値の下界値 $v>0$ を定める．

ステップ 1：(4)を満たす探索方向 Δx を求める．ポテンシャル関数 $f_v(x^k+\alpha\Delta x)$ をなるべく減少させるステップサイズ α を求め，$x^{k+1}=x^k+\alpha\Delta x$ とする．

ステップ 2：可能ならば最適値の下界値 $v\leq v^*$ を更新する．

ステップ 3：k を1つ増加して，ステップ1へいく．

ステップ1では，変数 α に関して1次元探索を使うことにより，ポテンシャル関数の最小値を求めることもできる．探索方向を求めるには，ポテンシャル関数がなるべく減少するように問題

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & f_v(x^k+\Delta x) \\ \text{制約条件} & A\Delta x=0 \\ & x^k+\Delta x\geq 0\end{array}$$

を考える．これは非線形計画問題であるので簡単に解けない．そこで，目的関数を1次関数

$$f_v(x^k)+\nabla f_v(x^k)^T\Delta x$$

で近似し，アフィンスケーリング法の場合と同様に不等式制約を条件 $\|(X^k)^{-1}\Delta x\|\leq 1$ に変更した問題

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & \nabla f_v(x^k)^T\Delta x+f_v(x^k) \\ \text{制約条件} & A\Delta x=0 \\ & \|(X^k)^{-1}\Delta x\|\leq 1\end{array} \tag{20}$$

を考える．ここで

$$\nabla f_v(x^k)=\left(\frac{q}{c^Tx^k-v}c-(X^k)^{-1}e\right) \tag{21}$$

である．$\Delta\bar{x}=(X^k)^{-1}\Delta x$, $\bar{A}=AX^k$ とするとき，問題(8)の場合と同様に，問題(20)の最適解は，$\omega=\|(I-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})X^k\nabla f_v(x^k)\|$ を使い

$$\Delta\bar{x}=-\frac{1}{\omega}(I-\bar{A}^T(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A})X^k\nabla f_v(x^k) \tag{22}$$

と表わされる．

ステップ2での下界値の更新方法を解説する．式(21)と(22)より

$$y=\frac{c^Tx^k-v}{q}\quad(\bar{A}\bar{A}^T)^{-1}\bar{A}\,X^k\nabla f_v(x^k)$$

$$z=\frac{c^Tx^k-v}{q}\quad(X^k)^{-1}(e-\omega\Delta\bar{x})$$

とすれば

$$A^Ty+z=c$$

が成立する．したがって，$z\geq 0$ ならば (y, z) が双対問題の実行可能解となり，b^Ty は最適値 v^* の下界値である．この下界値が現在の下界値 v よりも大きい場合に値を更新する．下界値が最適値よりも小さいとき，x^k が問題(20)の最適解に十分近づけば，(y, z) が双対実行可能となり下界値が更新できる．Gonzaga [30] には，$O(\sqrt{n}L)$ 反復を達成するためのパラメータ値 q とステップサイズ α の決め方が示されている．

双対問題のポテンシャル減少法は主問題の場合と同様であるので，次に主双対ポテンシャル減少法を解説する．主双対内点 (x, y, z) に対してポテンシャル関数

$$g(x, y, z) = q \ln(x^T z) + p(x) + p(z)$$

を定義する．このポテンシャル関数は，主問題の場合のように最適値の下界値を必要としない．その理由は，主双対問題の最適解では，双対ギャップ $x^T z = c^T x - b^T y$ が0となるからである．ポテンシャル関数は，不等式

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= (q-n)\ln(x^T z) + \ln\frac{(x^T z / n)^n}{\Pi_{i=1}^n x_i y_i} + n\ln n \\ &\geq (q-n)\ln(x^T z) + n\ln n \end{aligned}$$

を満たす．したがって，$q>n$ とすれば，実行可能内点列 $\{(x^k, y^k, z^k)\}$ は，$k\to\infty$ のとき $g(x^k, y^k, z^k)\to-\infty$ ならば，最適解に近づく．ポテンシャル減少法は，ポテンシャル関数値が減少するように実行可能内点列を生成する方法であり，その手順は次のように表される．

主双対問題のポテンシャル減少法

ステップ0：初期実行可能内点を (x^0, y^0, z^0) とし，$k=0$ とする．

ステップ1：$A\Delta x=0$ と $A^T\Delta y+\Delta z=0$ をみたす探索方向 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ を求める．ポテンシャル関数 $g(x^k+\alpha\Delta x, y^k+\alpha\Delta y, z^k+\alpha\Delta z)$ をなるべく減少させるステップサイズ α を求め，そのときの点を $(x^{k+1}, y^{k+1}, z^{k+1})$ とする．

ステップ2：k を1つ増加して，ステップ1へいく．ステップサイズを決めるときに1次元探索を使うこともできる．探索方向は，μ の値を定めて，条件(18)の等式条件にニュートン法を適用して，連立1次方程式

$$A\Delta x = 0$$
$$A^T\Delta y + \Delta z = 0$$
$$Z^k\Delta x + X^k\Delta z = -(X^k z^k - \mu e)$$

を解き求める．

Kojima et al. [32]の提案したポテンシャル減少法では，$q=n+\sqrt{n}$，$\mu=(x^k)^T z^k/(n+\sqrt{n})$ としている．このとき，反復回数は理論的に $O(\sqrt{n}L)$ である．

参考文献

[30] Gonzaga, C.C.: "Large Step Path - Following Methods for Linear Programming, Part II: Potential Reduction Method", *SIAM Journal on Optimization* 1 (1991) 280-292.

[31] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "A Polynomial - Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 44 (1989) 1-26.

[32] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "An $O(\sqrt{n}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 50 (1991) 331-342.

[33] Mascarenhas, M. F.: "The Affine Scaling Algorithm Fails for $\lambda=0.999$" ,Technical Report, Universidade Estadual de Campinas, Brazil (1993).

[34] Mizuno, S. and Nagasawa, A.: "A Primal - Dual Affine-Scaling Potential-Reduction Algorithm for Linear Programming," *Mathematical Programming* 62 (1993) 119-131.

[35] Monteiro, R. D. C., Adler, I. and Resende, M. G. C. : "A polynomial - time primal - dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension," *Mathematics of Operations Research* 15 (1990) 191-214.