解　説

内点法(1) ——概 論——

水野 眞治

1．はじめに

内点法は1984年にKarmarkar [7] により発表されてから，最適化問題などを解く方法として活発に研究されている．ある調査によれば，1993年までに内点法に関する論文が1300通以上発表されている．Karmarkarは，内点法の理論的な収束性を示しただけでなく，線形計画問題の解法として内点法が単体法よりも実際に高速であると報告した．内点法は，Karmarkar以前にも非線形計画問題の解法としてFiacco and McCormick [2] により研究された．またDikin [1] は，アフィンスケーリング法と呼ばれる最も単純な内点法を1967年に提案した．

最適化問題は，等式と不等式で表わされた制約条件を満たす実行可能解のうち，目的関数を最小（または最大）にする最適解を求める問題である．たとえば，線形計画問題は

$$\text{最小化 } c^Tx \quad \text{制約条件} \quad Ax=b,\ Bx\geq d$$

と表わされる．制約条件に含まれる不等式を等号ではなく厳密に不等号で満たす（$Bx>d$）点を内点と呼ぶ．1つの内点が与えられているとき，その近傍においては不等式制約をあまり考慮せずに，等式制約条件のみのもとで目的関数を減少させる新しい内点を計算することが可能である．内点法は，初期内点からこの手続きを繰り返す．線形計画問題では，最適解は内点ではなく，いくつかの不等式を等号で満たす境界点である．したがって，内点法は最適解以外の境界に近づかないように工夫しながら，最適解に近づく点列を生成する．

内点法は，線形計画問題だけに限らずさまざまな問題を解くことができる．2次計画問題，非線形計画問題，整数計画問題などほとんどの最適化問題に適用できる．また線形計画問題，2次計画問題の最適化条件を数学的にモデル化した線形相補性問題，それを一般化した非線形相補性問題も解くことができる．ゲーム論における均衡解を求める問題も線形相補性問題として定式化すれば内点法を使うことができる．最近では，最適制御の分野において非負定値行列問題の解法としても研究されている．

内点法が活発に研究されている理由は2つある．1つは，その理論的収束性が優れていることである．一般的にアルゴリズムは，問題の規模（変数の数，データの大きさ等）が大きくなるにつれて，多くの計算とメモリーを必要とする．計算量とメモリー量が問題の規模に関して多項式関数で表わされる上界で抑えられるとき，アルゴリズムが多項式オーダであるという．線形計画問題を解く単体法は，多項式オーダであるかどうか不明であり，いくつかのピボット法に対して多項式時間で解けない例題が存在する．内点法は，線形計画問題，凸2次計画問題，単調な（非負定値）線形相補性問題などを多項式オーダで解くことができる．

もう1つの理由は，実際に大規模な線形計画問題を高速に解くことができることである．1979年にKhachian [8] によって提案された楕円体法が理論的に多項式オーダであったにもかかわらず，実用的に単体法に太刀打ちできなかったのと対照的である．Lusting et al. [15] は，大規模な問題を解く場合には総合的に判断して内点法が単体法に実用上勝っているという結果を発表した．

2．アルゴリズム

内点法は，初期（実行可能または実行不能）内点が与えられたときに，探索方向を求めてその方向にあるステップサイズ進むという操作を繰り返すことにより内点を次々に更新し，最適解に十分近い点で停止する．このときの初期内点の求め方と停止条件については4

みずの　しんじ　文部省　統計数理研究所
〒106 港区南麻布4-6-7

節で解説する．この節では，内点の更新方法に焦点をあててアルゴリズムを説明する．

Fiacco and McCormick [2] が研究したアルゴリズムは罰金関数法またはペナルティー関数法と呼ばれている．罰金関数は，制約領域の内点で定義され，境界に近づくと発散する関数である．この罰金関数に重みをつけて目的関数に加えた拡張目的関数を定義する．このときの重みを固定して拡張目的関数の最小値を求める操作と重みをパラメータとして更新する操作を交互に行なう方法である．すなわち，この重みがゼロに近づくとき，拡張目的関数の最小解が問題の最適解に収束するという性質を利用する．この方法は，今野・山下 [13] に詳しく解説されている．

Dikin [1] により提案されたアフィン・スケーリング法は最も単純な内点法であり，実用的にも高速に問題を解くことができる．内点が与えられたとき，アフィン変換を使ってその点を制約領域の中心に移動し，制約領域に含まれる球面上で目的関数を最小化し，逆アフィン変換により戻した点を求める．アフィンスケーリング法には，主問題あるいは双対問題を解く場合と，主問題と双対問題を同時に解く場合の3つのタイプがある．

Karmarkar [7] の提案したアルゴリズムは，Karmarkar 法または射影変換法と呼ばれている．この方法は，アフィンスケーリング法がアフィン変換を使うのに対して，射影変換を使う．Karmarkar の発表したときには，最適値が0である，問題がほとんど同次形をしているといったことが仮定されたが，これらの仮定を必要としない射影変換法も提案されている．この方法が実用的に高速であるという数値実験の結果は報告されていない．

Karmarkar 以後に多くのアルゴリズムが提案されている．その中で最もよく知られているパス追跡法とポテンシャル減少法を概説する．

内点法では，最適解以外の境界に近づかないように内点を生成することが計算効率を上げるために重要である．境界から最も離れた点として，Sonnevend[22] により定義された解析的センターがある．それは，それぞれの不等式で表わされた境界との距離の積をある有界集合上で最大にする点である．解析的センターの集合として形成されるセンターパス (path of centers) が内点法を理解する上で重要な概念であるので，線形計画問題を例として説明する．内点が任意に与えられたとき，その点と目的関数値が等しいような実行可能領域を考える．最適解の集合が有界ならば，この領域も有界であり，解析的センターが存在する．この解析的センターは，最適値より大きな目的関数値に対してそれぞれ1点存在する．目的関数値をパラメータとして動かすと，解析的センターの集合はなめらかなパスとなり，それをセンターパスと呼ぶ(図1)．上記のパラメータ値を最適値に近づければ，センターパス上の点は最適解に近づく．パス追跡法は，センターパスから離れないような内点列を生成する方法である．具体的にはセンターパスの近傍(センターパスを含む集合)を定義し，その外へ出ないような内点列を生成する．すなわち，その近傍上の内点で探索方向を求め，近傍から出ないようなステップサイズだけ探索方向に進むことにより内点を更新する．

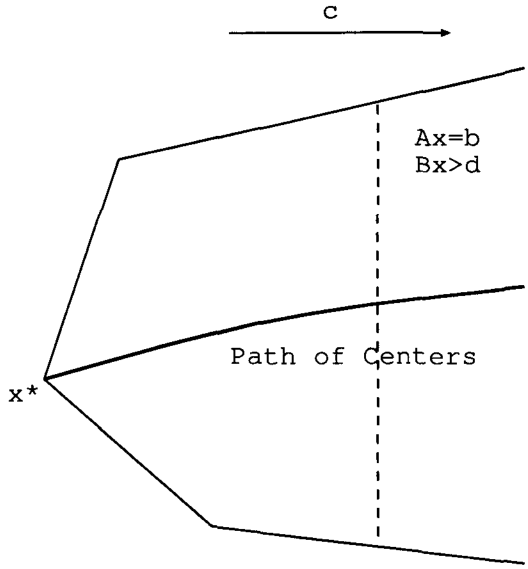

図1 センターパス

主問題と双対問題を解くパス追跡法は，Kojima et al. [11] と Tanabe [23] により提案された．主双対問題のセンターパスは，パラメータを持つ方程式系の解集合として表わされる．探索方向は，この方程式の解を求めるニュートン法により計算される．センターパスの近傍も簡単に定義でき，その近傍から出ないようにステップサイズを求める．Mizuno et al. [18] は，プレディクタ・コレクタ法と呼ばれるパス追跡法を提案した．このアルゴリズムは，プレディクタステップで双対ギャップを減少させる操作と，コレクタステップでパスの近くに戻るという操作を交互に行なう．

ポテンシャル関数は，Karmarkar により導入された．内点に対して定義され，最適解以外の境界に近づ

くと$+\infty$に発散するが，最適解では$-\infty$に発散する．逆にポテンシャル関数値が$-\infty$に発散する任意の点列は最適解に近づくという性質を持つ．ポテンシャル減少法は，この性質を利用して，ポテンシャル関数値が$-\infty$まで減少する内点列を生成して最適解を求める．すなわち，内点において探索方向を求め，ポテンシャル関数値がもっとも減少するステップサイズを計算する．Iri and Imai [6] が導入した乗法的罰金関数も（対数をとれば）この性質を持つ．このような性質を持つポテンシャル関数を定義するには，主問題の点列のみを生成する場合には，前もって最適値が必要である．最適値が不明な場合には，最適値の下界値をパラメータとして持つポテンシャル関数を定義し，その下界値を更新する必要がある．線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解く主双対ポテンシャル減少法では，このようなパラメータを必要としない．

3．内点法の理論的収束性

内点法の理論的収束性についての研究成果は，初期点が実行可能な場合とそれ以外の場合で異なる．Karmarkar の発表から1991年までは，初期点が実行可能であるという仮定のもとで内点法の理論的収束性が研究された．実際の計算実験においては，1989年頃から実行不可能な初期点を使ったアルゴリズムが Lustig et al. [14] らにより提案され，実際に高速に問題を解くことも報告された．このようなアルゴリズムの理論的な収束性が明らかにされたのは1991年の末以後である．初期点が実行可能とは限らない場合のアルゴリズムをインフィージブル内点法（infeasible-interior-point methods）と呼ぶ．

Dikin の提案したアフィンスケーリング法は，初期の段階では問題が非退化であるという仮定のもとでのみ収束性が示された．Tsuchiya and Muramatsu [26] は，退化している場合にもアフィンスケーリング法が大域的に収束することを証明した．しかし，アフィンスケーリング法で必要とされる計算量は多項式オーダで抑えられていない．

Karmarkar 法は，反復回数が$O(nL)$で抑えられる多項式オーダのアルゴリズムである．ここで，nは変数の数を表わし，Lは問題を計算機に記述するのに必要な総ビット数を表わす．そして，$O(nL)$はnLの高々定数倍で抑えられるという意味である．内点法では，1反復ごとに$n\times n$行列で表わされる連立1次方程式を解くので，その計算に$O(n^3)$の基本演算を必要とする．したがって，全体として$O(n^4L)$の基本演算を必要とする．Karmarkar は，行列の部分的な更新を使うことにより，全体の計算量を$O(n^{3.5}L)$まで減少できることも示した．反復回数が$O(\sqrt{n}L)$で抑えられるアルゴリズムは，Renegar [21] により提案された．Renegar の提案した方法はパス追跡法であるが，$O(\sqrt{n}L)$反復のポテンシャル減少法も存在する．これらと同じ計算量を必要とする多くのアルゴリズムが提案されているが，反復回数が理論的に$O(\sqrt{n}L)$より少ないアルゴリズムはいまだに発見されていない．$O(\sqrt{n}L)$反復のアルゴリズムに行列の部分的更新を使えば，全体の計算量を$O(n^3L)$に抑えることができる．

多項式オーダの内点法では，反復ごとに目的関数値と最適値の差が線形的に減少する．これは広い範囲の内点に対して成立する性質であるが，アルゴリズムで生成される内点が最適解に十分近づけば，さらに速く収束する可能性がある．そこで，1990年頃から内点法の局所的な超1次収束性に関する研究が活発に行なわれた．初期の研究では，問題が非退化である，あるいは点列が収束するという仮定のもとで超1次収束が証明された．Tsuchiya [25] は，非退化の仮定をしなくとも Iri-Imai 法 [6] が超1次収束することを示した．そして，Ye et al. [27] らはプレディクタ・コレクタ法 [18] が超1次収束することを証明した．

実行可能とは限らない内点を初期点とするインフィージブル内点法の大域的収束性は，Kojima et al. [9] により示された．Zhang [29] は，そのようなアルゴリズムで必要とされる反復回数が多項式オーダ$O(n^2L)$で抑えられることを証明した．さらに計算オーダの低いアルゴリズムは，Mizuno [17] により提案された．その反復回数は$O(nL)$であり，現在のところ，もっともオーダの低いインフィージブル内点法である．局所的に超1次収束するインフィージブル内点法は，Potra [20] らにより提案された．

4．初期点と収束判定

内点法は，内点を次々と更新することにより解に収束する点列を生成する方法である．そこで，初期内点をどのように準備するか，そして，いつどのように収束を判定するかといった問題が起こる．ここでは，線形計画問題について解説する．

まず始めに初期点として実行可能な内点を使う場合について考える．一般に，線形計画問題の実行可能解

を求めることは，最適解を求めることと同程度に難しい．そこで，実行可能内点を求めるためには，人工問題を作る必要がある．単体法の場合と同様に，人工問題には２つのタイプがある．１つのタイプは，その最適解が元の問題の実行可能内点となる人工問題であり，人工問題を解く過程をフェイズＩ，そこで得られた実行可能解から元の問題を解く過程をフェイズIIと呼ぶ．他のタイプは，明らかな初期実行可能解を持ち，その人工問題の最適解を求めることにより，元の問題の最適解を求めることができるか，あるいは実行不能であることを判定できるような問題である．このような人工問題を作るにはビッグエム（big M）と呼ばれる大きな係数を必要とし，その定数が小さすぎると問題の実行可能性の判定に失敗する可能性があり，大きすぎると計算効率が悪くなるというジレンマに陥る．Ye et al. [28] は，ビッグエムを必要としない同次自己双対問題（homogeneous and self-dual problem）を人工問題として使う方法を提案した．

インフィージブル内点法の初期内点は簡単に求められる．スラック変数を使うことにより，線形計画問題のすべての不等式条件を非負条件で表わせば，任意の正の点が内点となる．したがって，初期点として，たとえばすべての要素の値が１という点を使える．理論的には大きな値の初期点を使うと計算量を多項式オーダで抑えることができるが，実際の計算では問題の性質などを利用して初期点を選ぶことになる．初期点の選び方がインフィージブル内点法の計算効率に大きな影響を与えるが，最適な初期点の選び方は判明していない．

内点法の収束条件として目的関数値と最適値の下界値の差が 2^{-2L} であるという不等式を使えば，その条件を満たす内点から目的関数値を増加させない端点を計算することにより，最適解を得ることができる．しかし，問題のサイズを表わす L は大きな値であり，計算機上で 2^{-2L} より小さな値を計算することは非現実的であり，実際には計算機に依存した十分小さな数を使う．また，インフィージブル内点法では，目的関数値だけでなく，実行可能性も収束判定につけ加えなければならない．

5．実用的な内点法

内点法にはさまざまなアルゴリズムがあることを２節で述べたが，線形計画問題を解く内点法を実際にプログラミングする場合には，計算効率を高めるために以下のことを考慮することが大事である．

1．主問題を解く主内点法，双対問題を解く双対内点法，あるいは主問題と双対問題を同時に解く主双対内点法のいずれを使うか？
2．初期点をどうするか？
3．探索方向の求め方．
4．ステップサイズの決め方．
5．連立１次方程式の解法．

最近行なわれている内点法の数値実験では，Lustig et al. ［14, 15］に代表されるように，主内点法あるいは双対内点法よりも主双対内点法が使われている．その理由は，主双対内点法が主問題と双対問題の関係をうまく利用した内点法であり，計算速度が実際に速いからであろう．また，主双対内点法は，初期内点が実行不能の場合にも実行可能な場合とほとんど同じようにプログラミングできるという利点もある．

初期点については，はじめから実行可能解の得られる特殊な問題を除いて，実行不能な内点が使われている．その理由としては，人工問題を使う場合にはビッグエムの値の決め方が難しい，人工問題のサイズが元の問題より大きくなり計算効率が落ちるといったことがある．またフェイズＩとIIを使う場合には，２つの問題を解くために計算時間が倍程度かかる．人工問題として Ye et al. [28] の提案した同次自己双対問題を使うことにより，計算効率よく線形計画問題を解くという報告もある．

内点法で使われるほとんどの探索方向は，センタリング方向とアフィンスケーリング方向と呼ばれる２つの方向の凸結合で表わすことができる．アフィンスケーリング方向は，その名が示すようにアフィンスケーリング法で使われる方向である．センタリング方向は，解析的センターを求めるためのニュートン方向である．探索方向は，この２つのベクトルを凸結合するときの重みにより決定される．Lustig et al. の数値実験ではアフィンスケーリング方向に 99 %以上の重みを与え，ほんの少しだけセンタリング方向に重みを与えている．

ステップサイズについては，理論的にはパス追跡法またはポテンシャル減少法などにより決定する必要があり，その場合に多項式オーダ性が達成できる．しかし，実際に数値実験した結果の報告では，理論的に収束が保証されているステップサイズより長くとる場合に計算効率がよい．すなわち，理論では最悪の場合を考えて危険な行動をとらないが，実際にはある程度冒険した方が速いといったことであろう．Lustig et al.

が使っているステップサイズは，現在の点から探索方向に向かって実行可能領域の境界に達するまでのステップサイズに一定の割合（99％以上）を乗じて計算されている．

線形計画問題の係数行列は，ほとんどの要素が0である．そのような行列は疎行列と呼ばれる．この疎行列の性質を使い，連立1次方程式を効率よく解かなければならない．よく使われる方法は，行列のCholesky分解である．このとき，分解した行列が疎構造を保持するように，前もって変数あるいは制約式の順序を並べ変えることも重要である．

6．おわりに

これから内点法を勉強する，あるいは研究する場合に参考となる文献をいくつか紹介する．Karmarkar法については，Goldfarb and Todd [3] が最もよい参考書であろう．Hertog [5] は，線形計画問題，2次計画問題，凸計画問題を解く罰金関数法とパス追跡法を研究し，多項式オーダの計算量について詳しく議論している．パス追跡法とポテンシャル減少法については，それぞれGonzaga [4] と Todd [24] に要領よくまとめられている．線形相補性問題の内点法については，Kojima et al. [10] にパス追跡法とポテンシャル減少法が解説され，理論的な結果もすべて証明されている．非線形計画問題の内点法は，Nesterov and Nemirovski [19] がセルフコンコーダント（self-concordant）関数を導入し，統一的に扱っている．日本語の文献としては，今野 [12] の第14章に内点法が取り上げられ，Karmarkar法，罰金関数法，アフィンスケーリング法，IriImai法などの初期に発表された内点法が要領よく解説されている．水野 [16] には，主双対内点法が詳しく説明されている．

残念ながら，上記で紹介した文献はほとんどすべて初期点が実行可能な内点法のみを扱っている．インフィージブル内点法の結果をまとめた文献は見あたらない．この解説の第2講では初期内点が実行可能な場合の線形計画問題の内点法，そして第3講ではインフィージブル内点法について解説し，最後に第4講で線形相補性問題と非線形計画問題の内点法についてまとめる予定である．

参考文献

[1] Dikin, I. I.: "Iterative Solution of Problems of Linear and Quadratic Programming", *Soviet Mathematics Doklady* **8** (1967) 674-675.

[2] Fiacco, A. V. and McCormick, G. P.: "*Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*", John Wiley & Sons, New York (1968).

[3] Goldfarb, D. and Todd, M. J.: "Linear Programming, *Handbooks in Operations Research and Management Sciences, Volume* 1, *Optimization*" North-Holland, Amsterdam (1989) 73-170.

[4] Gonzaga C. C.: "Path Following Methods for Linear Programming", *SIAM Review* **34** (1992) 167-227.

[5] Hertog, D.: "*Interior Point Approach to Linear, Quadratic and Convex Programming*", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1994).

[6] Iri, M. and Imai, H.: "A Multiplicative Barrier Function Method for Linear Programming", *Algorithmica* **1** (1986) 455-482.

[7] Karmarkar, N.: "A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica* **4** (1984) 373-395.

[8] Khachian, L. G.: "A Polynomial Algorithm in Linear Programming", *Dokklady Akademiia Nauk SSSR* **244** (1979) 1093-1096.

[9] Kojima, M., Megiddo, N. and Mizuno, S.: A Primal-Dual Infeasible-Interior Point Algorithm for Linear Programming, *Mathematical Programming* **61** (1993) 261-280.

[10] Kojima M., Megiddo N., Noma T. and Yoshise A.: "*A Unified Approach to Interior Point Algorithms for Linear Complementarity Problems*", Springer-Verlag, New York (1991).

[11] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "A Primal-Dual Interior Point Algorithm for Linear Programming", *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo) Springer, New York (1989) 29-47.

[12] 今野浩：線形計画法，日科技連(1987)．

[13] 今野浩，山下浩：非線形計画法，日科技連(1978)．

[14] Lustig, I. J., Marsten, R. E. and Shanno, D. F. "Computation Experience with a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming",

Linear Algebra and its Applications 152, (1991). 191-222.

[15] Lusting I. J., Marsten R. E. and Shanno D. F.: "Interior Point Methods: Computational State of Art", *ORSA Journal on Computing* 6 (1994) 1-14.

[16] 水野眞治：線形計画問題の主双対内点法, 統計数理 40 (1992) 27-44.

[17] Mizuno, S.: "Polynomiality of Infeasible-Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematical Programming* 67 (1994) 109-119.

[18] Mizuno, S., Todd, M. J. and Ye, Y.: "On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematics of Operations research* 18 (1993) 964-981.

[19] Nesterov Y. and Nemirovskii A.: "*Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*", SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, USA (1994).

[20] Potra, F. A.: "A Quadratically Convergent Predictor-Corrector Method for Solving Linear Programs from Infeasible Starting Points", *Mathematical Programming* 67 (1994) 383-406.

[21] Renegar, J.: "A Polynomial-Time Algorithm Based on Newton's Method for Linear Programming", *Mathematical Programming* 40 (1988) 59-93.

[22] Sonnevend, G.: "An Analytic Center for Polyhedrons and New Classes of Global Algorithms for Linear (Smooth, Convex) Programming", *Lecture Notes in Control and information Sciences* 84 (1986) 866-878.

[23] Tanabe, K.: "Centered Newton Method for Linear Programming and Quadratic Programming", *Proceedings of the 8 th Mathematical Programming Symposium*, Japan (1987) 131-152.

[24] Todd M. J.: "Potential-Reduction Methods in Mathematical Programming", Cornell University, New York (1995).

[25] Tsuchiya, T.: "Quadratic Convergence of Iri and Imai's Algorithm for Degenerate Linear Programming", Research Memorandum 412, The Institute of Statistical Mathematics (1991).

[26] Tsuchiya, T. and Muramatsu, M.: "Global Convergence Result of a Long-Step Affine Scaling Algorithm for Degenerate Linear Programming Problems", Research Memorandum 423, The Institute of Statistical Mathematics (1992).

[27] Ye, Y., Güler, O., Tapia, R. A. and Zhang, Y.: "A Quadratically Convergent $O(\sqrt{n}L)$-Iteration Algorithm for Linear Programming", *Mathematical Programming* 59 (1993) 151-162.

[28] Ye, Y., Todd, M. J. and Mizuno, S.: "An $O(\sqrt{n}L)$-Iteration Homogeneous and Self-Dual Linear Programming Algorithm", *Mathematics of Operations Research* 19 (1994) 53-67.

[29] Zhang, Y.: "On the Convergence of a Class of Infeasible Interior-Point Methods for the Horizontal Linear Complementarity Problem", *SIAM Journal on Optimization* 4 (1994) 208-227.