教養講座

複雑性について ―その2

北原　和夫

1．はじめに

第1回では，主として開放系における複雑な現象について述べた．これらの現象は非線形な発展方程式によって記述される．巨視的な発展のもとには分子レベルの運動があって物理量は揺らいでいるが，マクロな測定では通常この揺らぎは観測されないが，巨視的な状態が分岐して新しい状態が生まれるような状況では，揺らぎは大きくなる．

平衡状態の揺らぎについては，力学の時間反転対称性を反映して，詳細釣合いというものが成り立っている．この揺らぎの時間反転対称性はマクロな輸送係数の対称性として現われる．よって，平衡状態の揺らぎと非平衡状態の揺らぎとの間に本質的に差があるのかないのかを検討することは，統計力学を非平衡状態に拡張する上で重要である．

本稿では，まず，平衡系における熱的揺らぎの一般的性質について述べ，次に非平衡系の揺らぎはどのような点で異なるのかということについて述べる．最後に微視的な非線形性がどのようにして不可逆性と結びつくかについて，最近の研究動向について解説する．

1.1 平衡状態における揺らぎ

平衡状態においても揺らぎは存在する．大きな揺らぎはなかなか起こらないが，小さな揺らぎは頻繁に起こる．揺らぎの起こる確率については，アインシュタインによる考察がある．

いま，ある巨視的物理量，たとえば，系内で反応が起こっていて，分子数がある値をとったとする．そのようなことの起こる頻度は，その分子数に対応する微視的な状態の数で与えられる，と考える．その背後には，微視的な状態は同じ頻度で実現する，という「等重率」の原理がある．この等重率を認めると，マクロに指定した状態に対応する微視的状態が多いほど，実現頻度が多くなる，ということになる．その微視的状態の数については，ボルツマンの原理があって，熱力学のエントロピー S が微視的状態数 W によって，$S=k_B \ln W$ という形で与えられるのである．ここで，$k_B=1.38\times10^{-16}\mathrm{erg}\cdot\mathrm{deg}^{-1}$ はボルツマン定数である．アインシュタインはこのボルツマンの原理を逆にして，揺らぎの実現頻度を $W=\exp(S/k_B)$ とおいた．そうすると，エントロピーさえ熱力学によって与えられれば，熱力学の範囲で揺らぎの実現頻度を評価できるのであり，分子レベルの運動まで遡る必要がなくなる．

通常の実験条件である，温度と圧力が一定という条件のもとで，系のエネルギーと体積の揺らぎの頻度を求めるには，系をさらに大きな系（「熱源（bath）」と呼ぶことにする）と接触させて，全体が孤立した系であると見なす．熱源のエントロピー S_b は熱源のエネルギー E_b と体積 V_b の関数である．また，系のエントロピー S は系のエネルギー E と体積 V の関数である．全体は孤立系であるから，全体のエネルギー $E_t=E_b+E$，全体の体積 $V_t=V_b+V$ は一定である．よって，系のエネルギー E，体積 V の実現する頻度は，

$$\begin{aligned} &W(E, V)\\ &=\exp\left(\frac{S(E, V)+S_b(E_b, V_b)}{k_B}\right)\\ &=\exp\left(\frac{S(E, V)+S_b(E_t-E, V_t-V)}{k_B}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

となる．次に，系よりも熱源のほうが圧倒的に大きいとして，$V\ll V_b$，$E\ll E_b$ を仮定して，S_b を E，V について展開する．

きたはら　かずお　東京工業大学　理学部
〒152 目黒区大岡山 2-12-1

$$\begin{aligned}
&S_b(E_t-E,\ V_t-V)\\
&\simeq S_b(E_t,\ V_t)\\
&-E\frac{\partial S_b}{\partial E_b}(E_t,\ V_t)-V\frac{\partial S_b}{\partial V_b}(E_t,\ V_t)\\
&=S_b(E_t,\ V_t)-\frac{E}{T_b}-\frac{P_bV}{T_b}
\end{aligned} \tag{2}$$

となる．ここで，T_b，P_bはそれぞれ熱源の温度と圧力である．こうして，実現頻度は

$$\begin{aligned}
&W(E,\ V)=\exp\left(-\frac{G(E,\ V)}{k_BT_b}\right)\\
&G(E,\ V)=E+P_bV-T_bS(E,\ V)
\end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる．この関数 $G(E,\ V)$ はギブス自由エネルギーを非平衡状態に拡張したものである．系のエントロピー $S(E,\ V)$ の微係数

$$\frac{\partial S}{\partial E}=\frac{1}{T},\ \frac{\partial S}{\partial V}=\frac{P}{T} \tag{4}$$

によって定義される系の温度と圧力が，熱源の温度と圧力と一致するときに，平衡状態のギブス自由エネルギーとなる．実際，このときに $G(E,\ V)$ は最小となり，エネルギーと体積の最大確率を与える．確率が上のように与えられると，最大確率を与える状態，すなわち，平衡状態のまわりでの揺らぎの統計分散を評価することができる．たとえば，温度 T の熱源に接触している系の体積 V の平衡値 V_{eq}からのずれ$\Delta V=V-V_{eq}$の二乗平均値は $\langle(\Delta V)^2\rangle=k_BTV_{eq}k_T$で与えられることが示される．ここで，$\langle\cdots\rangle$は統計平均を表わす．$k_T$は等温圧縮率と呼ばれ，圧力を加えたときに系がどれだけ体積を収縮させるかを示す量である．ボルツマン定数が右辺についていることから分かるように，通常平衡値からのずれは小さいものである．ところが，気相・液相の臨界点の近くになると，k_Tは発散する．つまり，わずかな圧力変化で体積が大きく変化する．このときには，平衡値から大きくずれる揺らぎΔV が発生する．体積が揺らぐ，ということは密度が揺らぐということである．実際に，液相・気相の臨界点のところでは，密度の揺らぎが大きくなり，光の強い散乱として観測される．

このように平衡状態については，等重率を基礎として熱力学の枠組みで揺らぎの統計的性質を評価することができる．

さらに，平衡状態における揺らぎのダイナミクスについては力学の可逆性を基礎にして一般的性質を示すことができる．いま，平衡状態において，いくつかの物理量 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ が時間的に変動しているとする．そして，簡単化のために，平衡状態における平均値を0とする[$\langle A_i(t)=0$]．揺らぎのダイナミクスは時間相関関数 $\langle A_i(t_0+t)A_j(t_0)\rangle$ によって表現される．ここでも，$\langle\cdots\rangle$ は統計平均を表わす．すなわち，ある物理量 A_jを時刻 t_0において測定し，そのあと時間 tだけ後の時刻 t_0+t において別の物理量 A_iを測定してその積をとる．そして，この積をいろいろな試料について平均したものが時間相関関数である．実際上は1つの試料において，時刻 t_0としていくつかの時刻をとって，それらについて $A_i(t_0+t)$ と $A_j(t_0)$ の平均をとる．

時間 t を大きくとると，$A_i(t_0+t)$ と $A_j(t_0)$ は統計的に独立となり，それぞれの平均値の周りに分布するので，0となる．

$$\lim_{t\to\infty}\ \langle A_i(t_0+t)A_j(t_0)\rangle=0 \tag{5}$$

これが，どのように0に収束するのかが大きな問題である．物理量 **A** を揺らがせる背後の力学が強いカオスの状態にあるときには，時間相関関数は指数関数的に減衰する．

さらに，もし物理量 **A** が時間反転に対して不変な物理量であるならば，力学の時間反転対称性により A_jを先に測定してから A_iを測定してそれらの積の平均をとったものと，順序を逆にしたものとは同じである．これを式で表わすと，

$$\langle A_i(t_0+t)A_j(t_0)\rangle=\langle A_j(t_0+t)A_i(t_0)\rangle \tag{6}$$

となる．これは，次節で，輸送係数の対称性を導くのに用いられる．

1.2 線形熱力学

系のエントロピー S が物理量 $A=(A_1,\cdots,A_n)$ の関数として与えられているとする．熱力学の第2法則によると，不可逆過程はエントロピー増大を伴い，エントロピーが最大のところが平衡状態に対応する．このことから，$\frac{\partial S}{\partial A_i}=0$ の状態が平衡状態であり，変化は起こらず，$\frac{\partial S}{\partial A_i}\neq 0$ ならば変化が進行する．よって線形の近似で，変化速度 $\frac{dA_i}{dt}$ は $X_i\equiv\frac{\partial S}{\partial A_i}$ に比例する，と考えてよい．これを，

$$\frac{dA_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}L_{ij}X_j \tag{7}$$

と表わす．L_{ij}はオンサーガー係数［あるいは，輸送係数］と呼ばれる［1］．

この方程式は非平衡状態から平衡状態への過渡的現象を表わすものである．平衡状態における揺らぎも，

平均的にはこれと同じ方程式に従うとすると，上で述べた揺らぎの時間反転対称性から $L_{ij}=L_{ji}$ が導かれる．

もう少し具体的に書くと，まず，時刻 t_0 において $A(t_0)=a$ であった揺らぎは平均的には微小時間の間に，

$$\langle A_i(t)\rangle a=a_i+(t-t_0)\sum_{k=1}^{n} L_{ik}\frac{\partial S}{\partial a_k}+\cdots \tag{8}$$

となるものとする．$\langle\cdots\rangle a$ は初期状態 $A(t_0)=a$ が与えられているという条件のもとでの平均である．平衡状態においては，初期状態 a 自体が分布しているから，平衡状態における時間相関関数を求めるには，$\langle A_i(t)\rangle a$ と初期値 a_j の積を a の平衡分布について平均すればよい．

$$\langle A_i(t)A_j(0)\rangle=\langle\langle a_i\rangle_a a_j\rangle_{eq} \tag{9}$$

ここで，$\langle\cdots\rangle_{eq}$ は平衡状態における揺らぎの分布についての平均を表わす．これより，

$$\begin{aligned}&\langle A_i(t)A_j(0)\rangle\\&=\langle a_i a_j\rangle_{eq}+(t-t_0)\sum_{k=1}^{n} L_{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial a_k}a_j\right)_{eq}\end{aligned} \tag{10}$$

となる．右辺の第2項については，平衡状態における揺らぎ a の実現確率が $W(a)=\exp\left(\frac{S(a)}{k_B}\right)$ であることを用いると，部分積分により，

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a_k}aj\right)_{eq}=-k_B\delta_{kj} \tag{11}$$

が得られる．よって，微小時間 $t-t_0$ に対して

$$\begin{aligned}&\langle A_i(t_0+t)A_j(t_0)_{eq}\\&=\langle a_i a_j\rangle_{eq}-(t-t_0)k_B L_{ij}\end{aligned} \tag{12}$$

が得られる．これと，(6)を組み合わせると，$L_{ij}=L_{ji}$ が導かれる [1]．

1.3 連続体

流体のような連続体を扱うときには，密度量を用いる．エネルギーそのものの揺らぎを考えるかわりに，流体の各部分のエネルギー密度 $e=E/V$ がどのように揺らいでいるかをみる．空間の2つの位置，r と r' におけるエネルギー密度の揺らぎがどのように相関をもっているかは，それぞれの位置におけるエネルギー密度 e の平衡値 e_{eq} からのずれ $\Delta e=e-e_{eq}$ の積 $\langle\Delta e(r)\Delta e(r')\rangle$ で表わされる．全体のエントロピーが各部分のエントロピーの和で表わされると仮定すると，各部分系は統計的に独立となるから，

$$\langle\Delta e(r)\Delta e(r')\rangle=k_B T c_v\delta(r-r') \tag{13}$$

が導かれる．ここで，c_v は単位体積当たりの熱容量，$\delta(r-r')$ はディラックのデルタ関数である．すなわち，異なる位置 $r\neq r'$ の間では，エネルギー揺らぎの相関はない．

2．非平衡系の揺らぎ

2.1 平衡に近い場合

流体の内部に温度勾配が存在して熱流が流れている状態は非平衡状態であるが，このときにエネルギーの揺らぎの相関 $\langle\Delta e(r)\Delta e(r')\rangle$ はどうなるであろうか．このような問題を扱うには，各部分において定義される物理量の場 $A_i(r,t)$ が $A_i(r,t)=a_i(r)$ という値をとる確率分布関数 $P(\{a_i(r)\},t)$ に対する発展方程式を解析しなければならない．

記述を簡単にするために，空間依存性も含めて多変数の分布関数に対する発展方程式の一般的な表式を求めよう．

線形熱力学を仮定すると，一般に物理量 $A_i(t)$ の発展方程式は

$$\frac{dA_i}{dt}=G_i(A)+\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\frac{\partial S}{\partial A_j} \tag{14}$$

と表わされる．ここで，$G_i(A)$ は $A_i(t)$ の時間発展速度のうちの可逆な部分を表わすものである．すなわち，エントロピー生成に寄与しない部分である．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial A_i}G_i=0 \tag{15}$$

次に，確率分布関数の従う発展方程式は，確率変数について2階の偏微分方程式［いわゆるフォッカー・プランク方程式］であり，平均値についての方程式は揺らぎの小さい極限で $A_i(t)$ に対する発展方程式と一致し，定常解として平衡状態の確率分布 $P_{eq}(a)=\exp(S(a)/k_B)$ をもつことを保証するものでなければならない，という要請をおく．そうすると，確率分布関数 $P(\{a_i(r)\},t)$ に対して次のような方程式となる [2]．

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t}=&-\sum_{i=1}^{n}=\frac{\partial}{\partial a_j}G_iP\\&+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a_i}L_{ij}\left(-\frac{\partial S}{\partial a_i}+k_B\frac{\partial}{\partial a_j}\right)P\end{aligned} \tag{16}$$

$k_B \to 0$の極限では揺らぎは小さく，確率分布関数は漸近的に$P \simeq \exp(\phi/k_B)$という形になり，ϕについては「ハミルトン・ヤコビ方程式」が成り立つ[3] [4].

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial a_i} G_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial a_i} L_{ij}\left(-\frac{\partial S}{\partial a_i} + k_B \frac{\partial \phi}{\partial a_j}\right) \tag{17}$$

この「作用変数」ϕをさらに最大値のまわりで展開する.

$$\phi(a,t) = \phi(\overline{a},t) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [a_i - \overline{a}_i(t)] \ (\sigma^{-1}(t))_{ij} \times [a_j - \overline{a}_j(t)] + \cdots \tag{18}$$

そうすると，平均値と統計分散は以下のように評価される.

$$\begin{cases} \langle A_i(t)\rangle = \overline{a}_i(t) + \cdots \\ \langle \Delta A_i(t) \Delta A_j(t)\rangle = k_B \sigma_{ij}(t) \\ \Delta A_i(t) \equiv A_i(t) - \langle A_i(t)\rangle \end{cases} \tag{19}$$

平均値$\overline{a}_i(t)$については

$$\frac{d\overline{a}_i}{dt} = M_i(\overline{a}) \equiv G_i(\overline{a}) + \sum_{i=1}^{n} L_{ij} \frac{\partial S}{\partial a_j}(\overline{a}) \tag{20}$$

となり，線形熱力学の現象論と一致する．また，分散については，

$$\frac{d\sigma_{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial M_i}{\partial a_k} \sigma_{kj} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} \frac{\partial M_j}{\partial a_k} + L_{ij} \tag{21}$$

が成り立つ．これらの式は，実は次のようなランジュヴァン方程式に対応する.

$$\begin{cases} \dfrac{dA_i(t)}{dt} = M_i(A(t)) + R_i(t) \\ \langle R_i(t)\rangle = 0 \\ \langle R_i(t) R_j(t')\rangle = 2 k_B L_{ij} \delta(t-t') \end{cases} \tag{22}$$

ここで，$R_i(t)$は揺動力である．以上の結果を連続体に拡張することができる．そして，M_iとして現象論の発展方程式を用いると，たとえば，エネルギー密度の揺らぎの空間相関に対する発展方程式を得る．いま，

$$\langle \Delta e(r,t) \Delta e(r',t)\rangle = k_B \sigma_{ee}(r,r',t) \tag{23}$$

とおくと，

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma_{ee}(r,r',t) = \frac{k}{c_v}(\nabla^2 + \nabla'^2) + 2\nabla_k T^2 \nabla' \delta(r-r') \tag{24}$$

となる．この方程式の定常解を

$$\sigma_{ee}(r,r) = g_{ee}(r,r') + c_v T^2 \delta(r-r') \tag{25}$$

とおくと，g_{ee}はエネルギーの揺らぎの平衡値からのずれを表わす．g_{ee}に対する方程式はポアッソン方程式であるから，非常に長距離に及ぶ相関が現われることを示している．つまり，遠く離れた位置における揺らぎは互いに独立でない，ということである [5] [6].

この長距離相関は，温度勾配によって一方向に流れる熱流によってもたらされるものであり，非平衡状態の特有の性質である．平衡状態においても，エネルギーの流れの揺らぎが存在しているが，一方向に揺らぎが起これば，その逆の流れが必ず存在していて，平均すると空間相関は露には出てこない．ところが，系が非平衡状態におかれるや否や，2つの逆向きの流れのバランスが崩れて長距離相関が現われる．これと，系の非線形性が結合すると巨視的な「散逸構造」の出現となる.

ここでの議論では，輸送係数L_{ij}の対称性を仮定した．もっと一般の非平衡系では，この対称性が破れる．その場合にどのようなことが起こるのか，次に述べよう.

2.2 平衡から離れた揺らぎ

一般の揺らぎについては，局所平衡の仮定にもとづく熱力学の議論が使えないので，前節のフォッカー・プランク方程式は使えない．多変数$X=(X_1,\cdots,X_n)$に対するマスター方程式から出発する.

$$\frac{\partial P(X,t)}{\partial t} = -\sum_r W(X \to X+r) P(X,t) + \sum_r W(X-r \to X) P(X-r,t) \tag{26}$$

ここではk_Bを小さいパラメータとする代わりに，系のサイズ展開を紹介しよう．系の大きさを表わすパラメータをΩと書く．Xは巨視的な物理量であって系の大きさに比例するものとする．$X=\Omega x$とスケールし，遷移確率を$W(X \to X+r) = \Omega w(x;r)$と表わ

し，さらに，確率分布関数を $P(X,t)=\exp(\Omega\phi(x,t))$ と表わすと，「ハミルトン・ヤコビ方程式」が得られる．さらに，

$$\begin{aligned}\phi(x,t)&=\phi(\bar{x},t)\\&-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[x_i-\bar{x}_i(t)](\sigma^{-1}(t))_{ij}\\&\times[x_j-\bar{x}_j(t)]+\cdots\end{aligned} \tag{27}$$

と展開すると，

$$\begin{cases}\dfrac{d\bar{x}_i}{dt}=M_i(\bar{x})\\ \dfrac{d\sigma_{ij}}{dt}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}K_{ik}\sigma_{kj}+\sum_{k=1}^{n}\sigma_{ik}K_{jk}+D_{ij}\end{cases} \tag{28}$$

ここで，

$$\begin{aligned}M_i(x)&=\sum_r r_i w(x;r)\\D_{ij}(x)&=\sum_r r_i r_j w(x;r)\end{aligned} \tag{29}$$

は遷移確率の1次，2次のモーメントである．また，$K_{jk}=\frac{\partial M_j}{\partial x_k}$ とおいた．非平衡定常状態における揺らぎの「循環」を考えよう．定常状態のまわりでの揺らぎの「角運動量」は，定常状態からのずれを $\Delta x_i(t)=x_i(t)-\bar{x}_i$ と表わすと，

$$J^{st}_{ij}=\left(\frac{d\Delta x_i}{dt}\Delta x_j-\frac{d\Delta x_j}{dt}\Delta_i\right) \tag{30}$$

と定義されるが，

$$J^{st}_{ij}=\frac{1}{\Omega}\sum_{k=1}^{n}(K_{ik}\sigma_{kj}-K_{jk}\sigma_{kj}) \tag{31}$$

と表わされる．実は，この角運動量がないかあるかは，マスター方程式で表されている系が定常状態において詳細釣合いを満たすかどうかによる．オンサーガーは非平衡定常状態が実現したときに，詳細釣合が破れている状態を「循環釣合」と呼んだ．巨視的にはまだ振動状態が実現していなくても，微視的な揺らぎのレベルですでに振動が起こっている，といってもよい [7]．

3．微視的可逆性と巨視的不可逆性

孤立系でエントロピーが増大するということを力学模型で示すためにはどうしたらよいか．最初にこの問題に取り組んだボルツマンは多数の分子からなる気体を考察した．個々の分子の運動を考える代わりに，ある与えられた位置と速度をもつ分子の数の分布関数を考えた．分子同士が衝突によってエネルギーと運動量を再配分する確率は，その衝突過程に関与できる速度と位置をもつ分子の数で決まる，と考え（これを「分子的カオスの仮定」と呼ぶ），分布関数に対する発展方程式を導いた．この方程式の解が平衡分布に近づいてゆくということを示して，不可逆性を説明した（1871年）．しかし，力学の不可逆性との矛盾を，確率的仮定を持ち込むことによって回避しただけで根本的解決とはならなかった．

最近計算機の発達により，力学方程式を実際に数値的に解くことができるようになり，多くの系について解析が行なわれた結果，可逆な力学法則の中に不可逆性の原因が隠されているというが分かってきた．

惑星の運動（力が距離の2乗に逆比例で，楕円運動），振り子（力が距離に比例していて，正弦運動）のような規則運動はむしろ例外的で，ほとんどの場合，運動方程式の解は大変複雑である．特に，ある運動に対して，それと近い初期条件から出発した別の軌道は，初めのうちは似たような軌道をとるが，次第に軌道の違いがどんどん増幅されて，全く違った発展をするということが，かなり一般的であるということが分かってきた．これを「初期条件に対する敏感さ」といい，また，このような運動は非常に複雑であり，「カオス」（混沌）と呼ばれる．

「初期条件に対する敏感さ」は，軌道同士が反発しあうことを意味する．この反発の強さは，「リャプノフ数」と呼ばれる数で表わされる．最近の研究から，この反発傾向には2つの側面があることが分かっている．反発することによって広がっていこうとする傾向「脱離速度」(escape rate）と，広がらずに不安定領域（repeller）の中で複雑な運動をするという「乱雑化」（randomization）とである．前者によって，軌道は許された相空間内に広がる傾向をもつ．これが，熱力学における「エントロピー増大則」の力学的意味である．だから，拡散的に発展する方向が時間の向きということになる．また，非平衡系の「輸送係数」は，脱離速度によって決まるのである [8]．

上で述べたように，輸送係数は揺動力の時間相関関数とかかわっていることが現象論のレベルで分かる．これを基礎として，分子レベルの力学模型から具体的に輸送係数を計算する方法論が1950年代に完成した [9]．しかし，その力学的基礎づけ，つまり，輸送係数が存在するための力学的条件はあいまいのままであ

った．最近になって，前述のGaspardらの研究で，軌道不安定性と拡散係数とが直接結びついていることが，特殊な系について証明された．

また，電気伝導度の計算の場合に，力学方程式を形式的に電場について展開していき，電場の１次に対する電流の応答を見るのであるが，電場に対する応答が分子レベルで１次で済むようなものかどうか，という問題があった．たとえば，パチンコ台をわずかに傾けただけで，パチンコ玉の軌道は大幅に変化する．これについても，最近の研究の結果，カオスによって１つ１つの確率的になる結果として，マクロな応答（パチンコ玉の集団の応答）は外場に対して１次の量となる，ということが示されている

4．平衡に向かわない系

複雑系と呼ばれる系には，平衡状態への収束が非常に遅いものがある．揺らぎのなかに，非常に低周波の成分を含む．これを$1/f$雑音と呼ぶ [10]．低周波の方で発散するので，これは，何らかの非定常性を表わしている．

少数自由度系で$1/f$雑音の存在を調べる研究が最近進んでおり，たとえば，２次元周期ポテンシャル中の粒子の古典的運動の粒子速度のパワースペクトルがfの逆べきになることが分かっている．この周期的ポテンシャルによる運動は，変数分離できない非可積分系で，エネルギー以外に保存量がなくカオティックなふるまいをする．

このような少数自由度の力学系の運動においては，相空間に，カオス的運動の領域がありその中に安定な運動を示す微小領域（安定な島）が自己相似的に散在しているとき，それらにつかず離れずゆらぐ運動が実現する．一般に，位相空間において，周期軌道が不安定化し始めたときにそのようなstagnation（淀み）領域が現われる．この運動は非定常的ゆらぎとみなされる [11]．

このような系では，１つの軌道上において運動の複雑さが時々刻々変化する．それを定量的に見るために，適当な時間間隔内で近接する軌道がどのように反発するかを調べる．つまり，それぞれの時間間隔内でリャプノフ指数を軌道間の反発の度合いとして定義する．このリャプノフ指数は大きくなったり，ほぼ０になったり，激しく変動している．０に近いときは，軌道は安定軌道のように振る舞い，リャプノフ数が大きいときは，カオス性が強い．相空間内には，安定領域とカオス領域が入り組んで存在していて，軌道はその中を漂い続けるのである．

5．おわりに

平衡系と非平衡系の揺らぎの性質の違いを述べた．また，微視的非線形性が巨視的な不可逆性を生み出しているということの可能性も理解いただけたかと思う．さらに，非線形性が平衡への緩和を遅らせて永久的にいろいろな状態を渡り歩き続けるという系も存在し得ることも重要である．したがって，平衡系というものが如何に特殊な系であるか，ということも印象深いものである．

参考文献

[1] Onsager, L.: Phys. Rev. 37 405 (1931).

[2] Kitahara, K., Miyazaki, K., Malek-Mansour, M. and Nicolis, G.: Noise in Physical Systems and 1／f Fluctuations (eds., Musha, T. et al, Ohmsha, 1991) p. 611.

[3] Kubo, R., Matsuo, K. and Kitahara, K.: J. Stat. Phys. 9 51 (1973).

[4] 北原和夫，吉川研一：「非平衡系の科学Ｉ：反応・拡散・対流の現象論」（講談社サイエンティフィック，1994年）．

[5] Nicolis, G. and Malek-Mansour M.: Phys. Rev. A 29 2485 (1984).

[6] G.ニコリス，I．プリゴジン：「複雑性の探究」（みすず書房，1993年）．

[7] Tomita, K. and Tomita, H : Prog. Theor. Phys. 51 1731 (1974).

[8] Gaspard P. and Rice S. A. : J. Chem. Phys. 90 2255 (1989) ; Gaspard P. and Nicolis G. : Phys. Rev. Lett. 65 1693 (1990).

[9] Green M. S.: J. Chem. Phys. 20 1281 (1952) ; Kubo R.: J. Phys. Soc. Japan 12 570 (1957) ; Kubo, R, Yokota, M. and Nakajima, S.: J. Phys. Soc. Jpn 12 1203 (1957)；久保亮五他「統計物理学」（岩波講座現代物理学の基礎６，1972）．

[10] 武者利光・北原和夫：「1／f 揺らぎの物理」，応用物理 58 1688 (1989).

[11] Aizawa Y., Kikuchi Y., Haruyama T., Yamamoto K., Ota M. and Tanaka K.: Prog. Theor. Phys. Suppl. 98 36 (1989) ; Aizawa Y.: Noise and Physical Systems and 1／f Fluctuations (Ed. Musha T. et al, Ohmsha, 1991) p. 483.