教養講座

金平糖の数理モデル

中田　友一

1．金平糖の歴史

1549年フランシスコ・ザビエルが来日し，日本にキリスト教を伝えた．その20年後に，ルイス・フロイスが来日し，織田信長に謁見を許されている．その時にローソクとギヤマンの瓶に入った金平糖を献上したとフロイス著『日本史』の中には書いてある．フロイスが祖国ポルトガルを離れインドを経て，日本へ来る際に金平糖を持参したのが興味深い．金平糖は旅行中の慰めであり楽しみでもあったのであろう．そしてこの金平糖を信長がとても愛して喜んだとある．このように，日本で初めて金平糖を食べた人は信長であったのである．これが秀吉の代になり，さらに武将や奥方たちに知られるようになった．金平糖はポルトガル語でコンフェイト(Confeitos)と呼ばれており，それが日本語で金平糖，金餅糖，糖花等（『和漢三才図絵』）の漢字があてられるようになった．

いつ頃からは定かではないが，茶道の中にも取り入れられ，野点の際に金平糖が使用されている．さらに，江戸時代の中期には日本製の金平糖が作られ流行している．流行したといっても明治の中頃までは上流階級の人たちのおやつであり，旅行の際の大切な食物であった．

ところが，大正時代に入るとキャラメル等におされて急に金平糖が町から姿を消してゆくのである．これについては物理学者寺田寅彦は随筆『備忘録』の中で金平糖が消えてゆくことを嘆いている．

しかし幸いにも金平糖は，消滅せずに今日も存在している．そうした金平糖の消滅を防いだ理由として，第1に金平糖が天皇家の慶事の際の引出物に使用されたこと，第2に金平糖が軍隊の携行糧食に使われるようになり，それは今日の自衛隊でまだ続いていることなどが考えられる．

最近では秋篠宮様と紀子様の結婚披露宴，天皇陛下の即位の礼の後の「饗宴の儀」，皇太子様と皇太子妃雅子様の結婚披露宴の引出物に金平糖の入った銀製のボンボニエール（フランス語で菓子器）が使われている．こうしてみると，金平糖がいかに日本人に愛され大切にされてきたかがわかる．しかしながら，甘い物が豊富になった今日，金平糖は再び絶滅の危機にさらされているのが現状である．

2．人気新商品としての金平糖

江戸中期に日本製の金平糖が作られるのであるが，技術開発の苦心がOR的におもしろいので，少しふれてみよう．

井原西鶴の著書の中に経済小説『日本永代蔵』という本がある．1686年頃に執筆されたこの本は，寛永末年から天和・貞享までの半世紀におよぶ貨幣経済時代の金儲けに挑戦する町人像を描いたものである．このころすでに世の中は，金融機関の整備と海運の開発によって資本蓄積時代が終わり，商業資本時代を迎えていた．西鶴は，それを「西鶴織留」の巻6の4で次のように書いている．

> どんな商売でも，その道をよく覚えて世渡りするのが商人の常道である．だがしかし今は昔とちがって，銀が銀をもうける世の中になったから，知恵才覚のある者よりも，なみの人でも資本をもった者のほうが儲ける時代と成った．

何かバブル時代の日本の経済状況を思い浮かべてしまう文章である．しかし西鶴は，商売とは親からの財産などあてにせずに自分の才覚と努力で成功する一代分限が望ましいとして，親の財産とは無縁の若者たちを激励するつもりでこの作品を書いたようである．したがって作品の中には，一代にして財をなした人たち

なかた　ともいち　中京大学　教養部
〒466 名古屋市昭和区八事本町101

の成功，失敗の物語が沢山書かれている．金平糖は人気新商品を開発した男の話として巻5の1に出てくる．そこの文を取り出してみよう．

> これを初めて考えついたのは，長崎でみすぼらしい暮らしをしていた町人であった．2年あまりも金平糖の製法に苦心して，中国人にも尋ねてみたが，いっこうに知っている様子がないので心を悩ましていた.「この金平糖に種がないはずはない．胡麻をもとにして，それに砂糖をかけ，だんだん丸めていったものであるから第一に胡麻の製法になにか秘密があるだろう」と考えついた．そこでまず胡麻を砂糖でにつめ，それを幾日も干し乾かしてから煮鍋へまいて煎ってみた．すると温まっていくにつれて胡麻から砂糖を吹き出し，しぜんと金平糖ができあがった．胡麻一升を種にして，金平糖二百斤になった．一斤銀四分でできたものを五匁で売ったので何年もたたないうちに，二百貫目かせぎだした．これを発明した男は，菓子屋をやめて小間物店を出し，さらに商才を発揮して，商売に身を入れたので一代の間に千貫目持ちの金持ちに成った．(『日本永代蔵』麻生訳，明治書院)

何と金平糖は，当時の人気新商品であり，その開発者は億万長者になったのである．また，開発のためには2年間苦心したという.西鶴は,開発に40年も50年もかかるようなものは商売にならず，このように2年間くらいでオリジナリティのある商品開発ができることが良い，と指摘している．現代にも通用する話であろう．

3．金平糖の製造過程

私自身金平糖を作っている工場を探しあてて，その製造工程をみせてもらい，初めてその作り方がわかった．簡単に現在の製造過程を述べてみよう．

直径2mくらいの浅い鉄のタライを下からガスで熱して，約30度くらい傾けてゆっくりと回転させる．グラニュー糖を60kgタライに入れる．タライの上1mくらいのところに，濃度の濃い(水180kgに砂糖320kg）温めた砂糖水を箱に入れて，穴のあいた管から微小ずつタライの中へ落下させる．落ちた砂糖水は一部をぬらすがすぐ乾いてしまう．これを続けるとグラニュー糖の小さな粒子がだんだん大きくなり角が出てくる．直径7㎜くらいの大きさになるのには4日から5日かかり直径2㎝くらいの大きさになるのには10日くらいかかる．(名古屋市内の春日井製菓工場）

作り方はわかったが，なぜ角が出るのかはどうしてもわからない．じつは寺田寅彦も次のように語っている．

> 金平糖に何故角が出るか，其数が何故統計的に決っているか．この返答は如何に偉い物理学者でも出来ない．こんなことでは現代の物理学もどこかに欠けているところがあるのだと思ふ．(岩波『寺田寅彦全集』第18巻p.760)

ここで，粒子の成長のための大切な条件を挙げてみると，次の3点にまとめられる．

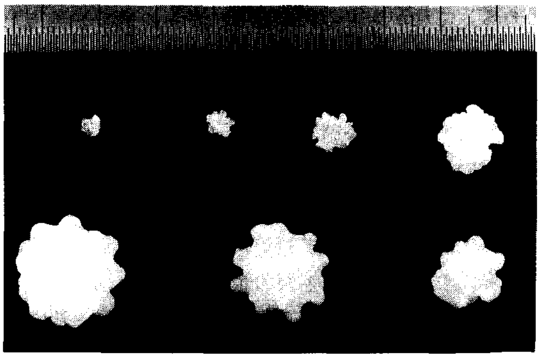
a．タライの回転速度

b．上からかける糖蜜（しずく）の量

c．タライを温める温度

である．この3条件の変化によって色々な種類の金平糖ができあがる．

タライの温度が熱すぎると，グラニュー糖の粒子は溶けてしまう．また糖蜜の量が少ないと成長は遅いしなかなか角ができない．逆に糖蜜の量が多いと成長は早いが，角が余り大きくならず球形になってしまう．さらにタライの回転を速めると，この時も球形になってしまう．金平糖の成長段階を示したのが下の写真である．



金平糖の成長段階

菓子の金平糖以外にニッケルと胆石の金平糖があるので紹介しよう．

ニッケルの金平糖

電気分解では電解液に陽極板と陰極板を浸し，これらの電極の間に電流を流すと陰極板の上に純金属を析出させることができる．さらに新しい方法は，陰極板の近くに金属粒子を懸濁させ，この金属粒子の表面に金属を析出させる懸濁電解法である．一般には懸濁状態での粒子の表面で均等に析出が起こるので成長した粒子は球形になるはずである．

ところが1974年亀谷氏のドイツ語論文 [5] に，球形にならずに直径2㎜サイズのニッケルの金平糖ができた報告がある．そこでは，ニッケルの金平糖は陰極板上のニッケル粒子の中で陽極に近い粒子の角の先端に電流が集中して金属析出が起こり，このため角が成長すると考えられると解説されている．

この場合も熱板の温度が高過ぎると種（タネ）粒子まで溶け，低いと球形のまま大きくなる．そして槽電流が高過ぎるとニッケル粒子がお互いにくっついて板になってしまい，低過ぎると角はできず球形に成長する．

同じような金平糖が銅や鉛でもできるが，金や銀ではできないことが実験によってわかっている．ニッケルの金平糖の場合に先ほどの3条件を当てはめてみると，陰極の動かし方，熱板の温度，懸濁水内のイオンがそれぞれ3条件として対応すると考えられる．

胆石の金平糖

胆嚢は風船が拡大したり収縮したりする運動を繰り返している．毎朝新しい胆汁ができて胆嚢の中に入ってくる．このとき古い胆汁と新しい胆汁の接平面にあるとき突然胆石の種石が出現するという．

3条件のことを考えると，熱は体温で36度が保たれている．回転運動は胆嚢の収縮運動と対応している．そして糖蜜は毎日の新しい胆汁が対応する．すると種石さえできれば，金平糖と同じように石が成長していくのである．

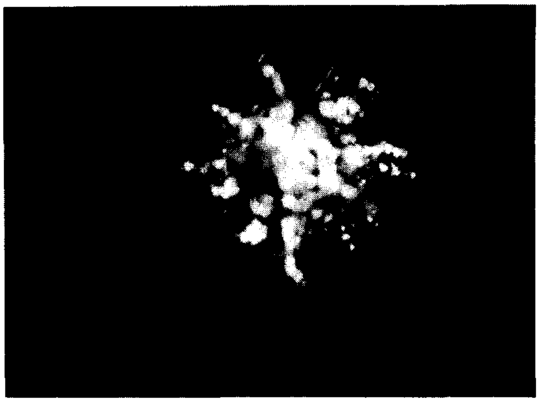
ここでも，ニッケルの金平糖が可能であったように，胆石の成分がビリルビンであれば金平糖の形（1～2㎝）ができることがわかっている．しかし成分がコレステロールの場合は角ができない．そうした意味では上の3条件にもう1つ

d．糖蜜の成分

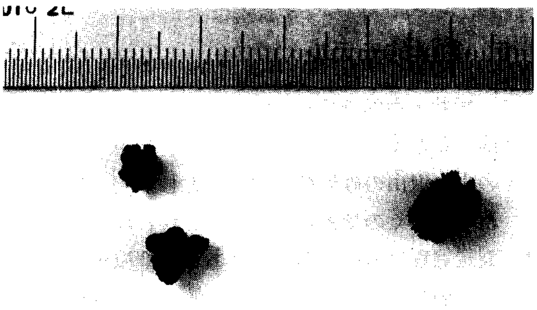
を付け加えるべきかもしれない．

以上の条件の比較から，胆石の治療のアイディアとして，糖蜜（しずく）の濃度を薄めると金平糖に角ができないのだから，胆汁の濃度を変える薬を飲ませればよいということになる．また，胆嚢の周囲に高熱を与えれば(火傷をしない限り)，胆石は溶けるはずであろう．現在は胆石に超音波を当てて破壊しているが，この場合，球形状の物は破壊できても金平糖状の物は破壊できないので結局は胆嚢を切除してしまう．

こうして考えてくると，金平糖には菓子，化学，医学の分野に共通している問題があることがわかる．さらに成長しているかどうかは未知であるが，エイズやC型肝炎のウィルス，痛風の石が金平糖の形をしていることも知られている．つい最近であるが，人工膀胱の中に金平糖状の尿路結石ができたことも報告されている．



ニッケルの金平糖



胆石の金平糖

4．物理的興味としての金平糖

金平糖を物理的興味の対象として取り上げた人は，やはり寺田寅彦である．彼は弟子の福島浩氏に金平糖の研究 [3] を行なわせ，そこで福島氏は次のような観察をしている．

イ）半径の比　金平糖を輪切りにし，その断面の突起部を連ねる円（外接円）と凹部を連ねる円（内接円)を定める．外接円の半径を r_a，内接円の半径を r_i とすると，その比 r_i/r_a は各金平糖の成長段階についてほぼ一定で，0.8くらいである．

ロ）突起の数　ガラス板の上に紫インクを薄く塗り，その上で金平糖をころがすと，突起部には紫の斑点がつく．これによって特に小さい突起とより大きな突起とを区別することができる．インクのつかない突

起の数を K，突起の総数を N（インクのついた突起の数は $N\text{-}K$），また突起の中には先端が2つに分かれたものが時々あるので，これを2つと数えたのが N，これを1つと数えたのが N' であるとする．内接円の半径が0.4cmくらいまでの突起の数は30くらいであり半径が0.4cmを越えると，N も N' も突起の数はともに減少しはじめる．

また戸田盛和氏と江沢洋氏は，数学セミナー[1]の中で「コンピュートー」という可愛い名前のもとに，シミュレーションを行なっている．

彼らは単位円周上に6つの点を置き，そこへブラウン運動をした粒子が無限遠点から飛んできて，6つの点について成長していくモデルを考えている．

5．数学的モデル

(1) 村井・中田モデル [6]

3節で見たように，濃度のこい糖蜜粒が，大きなタライの中の沢山の砂糖粒の中へひとしずく，ひとしずく，落ちていくのである．そこでわれわれのモデルでは，製造過程において糖蜜粒はある砂糖粒から他の砂糖粒へ接触しながらタライ全体へ散らばってゆくのだと仮定する．そして金平糖がいちど角を出しだすと，糖蜜粒は容易に角の先に付着して，熱で固くなっていく．換言すれば角の近くに糖蜜粒が付着しやすいということである．

さらに，糖蜜粒は同じ大きさで，最小の粒を呼ぶことにする．最小といっても分子のような小さなものでなく，平均的に同質量を持ったしずくであるとする．モデルの考え方は簡単であり，m 個の箱の中に N 個のボールを入れる問題によく似ている．単位円 S^1 上（これが金平糖を表わす）に分布する糖蜜粒の数の分布を考えることにする．S^1 を m 個の等間隔の弧 I_i に分割する．c 個の大きさの糖蜜粒が，各モンテカルロ法（以下MC法）操作ごとに金平糖へ付着させる．$S_i(n)$ は n 回までのMCステップで i 番目の弧 I_i に累積した糖蜜粒の数とする．$S_i(n)$ は $S_{m+1}(n)=S_1(n)$ を満たすとする．

また，初期値として $S_i(0)=b$ とする．ただし b は正整数とする．n 時点での S^1 上の糖蜜粒の総数を N とすると

$$N=\sum_{i=1}^{m}S_i(n)=nc+mb \tag{1}$$

となる．n 回目のMCステップで大きさ c の糖蜜粒が区分 I_i に落ちる確率 $p_i(n)$ を

$$p_i(n)=\{0.5(1-w)S_{i-1}(n)+wS_i(n)+0.5(1-w)S_{i+1}(n)\}/N \tag{2}$$

ここで w は重みを表わす数で $1/3\leqq w\leqq 1$ の実数である．この確率は糖蜜粒がいちど付着した所には，また付着しやすくなるという性質を表わしたものである．(2)式の分布に従って各糖蜜粒が区分 $I_i(i=1,2,\cdots,m)$ に落ちるようにシミュレーションを行なう．

(2) いくつかの結果

数学的に厳密なものではないが，いくつかの特性を述べる．シミュレートした金平糖の絵は，累積糖蜜粒数 $S_i(n)$ を核の中心から i 番目の弧の中点までの長さとして，その点を各 i ごとに結んだものである．金平糖はサイズ $2b$ の丸い核からスタートする．

図1でMC反復における金平糖の成長を示した．これはパラメーター $(b,c)=(1,1)$，式(1)で $m=100$，式(2)で $w=0.5$ とした場合のものである．

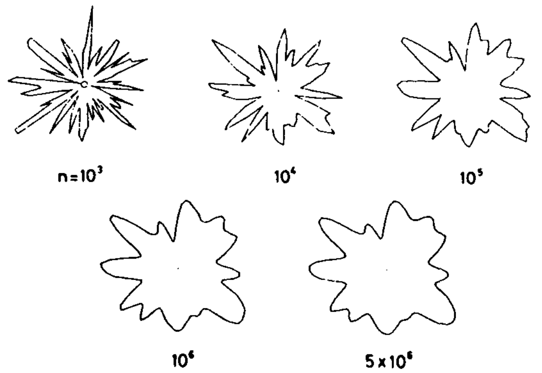


図1

(a) 初期の角が影響する．

$n\leqq 10^5$ までの絵をみると，初期の数千回くらいまでの乱数の出方が角の形の原型となっている．

今，$S^*(n)$，$S_*(n)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}S^*(n)&=\underset{1\leqq i\leqq m}{\mathrm{Max}}\ \{S_i(n)\},\\ S_*(n)&=\underset{1\leqq i\leqq m}{\mathrm{Min}}\ \{S_i(n)\}\end{aligned} \tag{4}$$

(b) 主なる角は，時間が経過しても消えない．

$n=10^5$, 10^6, $n=5\times10^6$ での形では，主なる角はそれぞれ同じ所に出ている．また最大値 $S^*(n)$（あるいは最小値 $S_*(n)$）をとる区分は $n\geqq 3\times10^5$ の範囲で単位円 S^1 上の特定した区分で固定している．

(a)，(b)は，粒子がランダムに i-区分を選び，ある

ところからは i-state dependent な成長をしていること示している．

$S_i(n)$が次の性質を満たすとき，パラメータ H の Self-similarity を持つと言おう；

$$S_i(an)=a^{H_i}S_i(n) \quad (i=1,2,\cdots,m) \tag{5}$$

(c) ある領域で Self-similarity を持つ．

$n=3\times10^5$を超えると，経験的に次の関係を見ることができる．

$$S_i(n)=A_i n^{H_i} \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{6}$$

ここで A_iと H_iは定数である．(6)式は次のような関係式に書き換えることができる．

$$S_i(an)=a^{H_i}S_i(n)\,(i=1,2,\cdots,m) \tag{7}$$

ここで a は任意の正の有理数である．

実際上 n が $3\times10^6\leqq n\leqq2\times10^7$の範囲で H_iは安定している．すなわち上の領域で $H_{90}=0.987$ for S^*，そして $H_{29}=1.048$ for S_*である．

n が十分大きなところでは，近似的に幾何学的類似性がすべての i で H_iはほとんど 1 に近いと考えられる．ここでの H は“ハーストの H”と呼ばれるものであり，これについての文献一覧は Taqqu [10] を参照されたい．

(d) 元の核が大きすぎると（$b>>c$）角はできない，糖蜜粒が多すぎる（$b<<c$）と角の成長は速いがしだいに角が消えてゆく．

パラメータ $(b,c)=(100,1)$ でシミュレーションをしてみると，ほとんど角が伸びてこない．

(e) 無限にゆくと丸くなる．

n をさらに大きくする（$n\geqq1.3\times10^{14}$）と $S^*(n)$ と $S_*(n)$ の比が 1 へ近づくことが予想される．これは将来再び角は消えて，また丸くなることを意味する．

(f) 重み数 w は H_iにほとんど関係ない．

$w=1$ の場合は隣合う区分がそれぞれ独立であることを意味する．この場合は m 種類のボールの入ったポリヤの壺のモデル [3] になっている．

上の議論は d 次元の場合も可能である．しかし円を等分割したように，球を等面積に分割する点に困難な点がある．それでもある工夫により，(2)式と同様に確率を考えることができる．ランダムに m 個の点を球面上に取り，その点を中心にして単位円を描き，円内の粒子数を数えるのである．各回ごとに円の位置は変わるが考え方は 1 次元の場合と同様である．

6．むすび

金平糖の成長過程を数学的にきちんと説明するのが，意外とむずかしい．古い論文にエデン [2] の仕事があり，リチャアドソン [9] がそれを数学的に考えている．原点を 1 点固定し，無限遠点からブラウン運動をした粒子が次々に飛んできて，その点に付きながら成長させるモデルは DLA (Diffusion Limited Aggregation) モデルとして研究されている．こちらの方はフラクタルの性質もあり，Kesten [8] が論文を書いている．金平糖に関することをわかりやすく子供用に中田 [7] が本を書いている．

参考文献

[1] 戸田盛和；寺田寅彦と金平糖，数学セミナー，8, 23-33, 1986.

[2] M. Eden.；A Two dimentional Growth process. Proc. of the fourth Berkeley symposium on Mathematical Statistics and Probability Vol. 14, 223-239, 1961.

[3] Feller, W.；An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol 1, J. Wiley, 109-110. 1967.

[4] 福島　浩；金平糖の生成と基の形状について，理研彙報 7, 1930.

[5] Kametani. H. and Yamauchi.Ch.；Suspension-seiektrlse von Nickel mit Hilfe einer Schwingzell, Sonsedruck aus Zeitschrift Erzmetall, 29, 107-114, 1974.

[6] Murai N. and Nakata T.；Rounded Spikes of Kompeitoh and Scaling Relations, American Journal of Physics. 56 (5), 459-462, 1988.

[7] 中田友一；おーいコンペート，あかね書房，1990.

[8] Kesten. H.；Hitting Probability of random walks on z^d. Stoch. Proc. Appli. 25. 1987. 165-184.

[9] Richardson. D.；Random growth in a tesselation. Proc. Camb. Phil. Soc., 74, 515. 1973.

[10] Taqqu. S. M.；Dependence in Probability and Statistics. 137-162, Birkhauser, 1986.