最近のアルゴリズムから

永持　仁

21世紀のORについて語るのは私にとってはたいへん難しい．私のイメージするORとは，数学的な基礎研究から利潤を生み出す実用的な応用まで実に多様な専門分野の有機的な集合体であり，自分はその中の１つの基礎研究に従事しているにすぎないからである．ORは，これまでモデル化法，数理計画法，数値解析法，システム化法などにおいて数多くの有用な手法を開発してきているが，もちろん，これらをツールとして新しい問題に応用していくことだけがORの使命ではなく，その魅力を持つところでもない．ORはきっと一語に集約できるような原理を持つものではなく，問題解決に試行錯誤し続けるOR屋さんとともに新しい時代の局面に応じて進化する道具箱のようなものであろうか．OR屋さんにとってORの魅力とは，新しい道具，あるいは道具の使い方を発見し問題解決に成功することであろう．このあたりで，私のORに対する漠然としたイメージを並び立てるのは終わりにして，自分が研究に従事する組合せ最適化から最近報告された面白いネットワーク算法を２つ簡単に紹介したい．専門的な話題になって恐縮であるが，これが，組合せ最適化をORで使う方，あるいは，他の専門分野の方にとっても何かの問題解決のヒントになれば幸いである．ここでは，最小カット問題と多品種流問題に対し最近発見された単純な解法を紹介する．以下，紙面の都合上，問題の応用上の有用性や必要な細かい議論や仮定などは一切省略する．詳細については原論文を参照されたい．

図1に示すように，頂点が向きのない辺で結ばれ，各辺に建設費用，輸送容量，信頼性などを表わす物理量として非負の実数 $c(e)$ が付随する無向ネットワーク N を取り上げる．辺の集合を E，頂点の集合を V として，V を２つの空でない集合，X，V-X へ分割したものをカットと呼び，カット X，V-X の持つ容量値を両端が X と V-X の間にまたがる辺の容量の総和と定義する．いま，N のすべてのカットの中で最小の容量値 $\lambda(N)$ を求める最小容量カット問題を考えよう．図１の例では，$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ と $\{v_5, v_6, v_7\}$ による分割が最小容量値７を与えている．最大流アルゴリズムを（頂点数－１）回ほど使えば最小容量カットが見つかることに気づかれる方も多いであろう．ここではもっと直感的なアプローチを試みる [1]．大きな容量を持つ辺ほど最小容量カットの分割にまたがる可能性が低いと考えられる．そこで次の基本操作を用意する．「縮約操作：１つの辺 e をその容量に比例する確率（すなわち，$c(e)/\Sigma_{e'\in E}c(e')$）でランダムに選び，その辺 e を１点に縮める（すなわち，e の両端の２頂点を同一視する．このとき二重になる辺は容量の和を取って１本にまとめる）」．ある辺 e を１点に縮めても，e の両端点を分離しないようなカットは明らかにそのままその容量値を変えずに生き残る．任意の１頂点 v と残りの頂点集合による分割も N のカットであることから頂点数 $n=|V|$ に対し，$\lambda(N)/\Sigma_{e\in E}c(e) \leq 2/n$ が成り立つ．したがって，ある容量最小カット X，V-X を考えたとき，上記の縮約操作において辺を選んだ場合，その辺がこのカット X，V-X にまたがる確率，いいかえれば，縮約操作によりこのカットが壊される確率は $2/n$ である．よって，この縮約操作を $n-2$ 回繰り返して最後にネットワークが２頂点になったとき，それぞれの頂点に縮約されたもとの頂点集合の作る分割が，この容量最小カットに対応している確率は，少なくとも $(1-\frac{2}{n})(1-\frac{2}{n-1})\cdots(1-\frac{2}{3})=\binom{n}{2}^{-1}$ であり，このきわめて単純なアルゴリズム

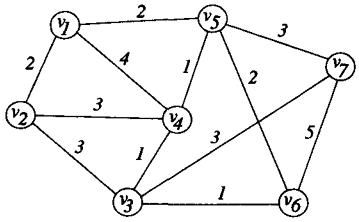

図1　無向ネットワーク N の例

ながもち　ひろし　京都大学　工学部数理工学教室
〒606-01 京都市左京区吉田本町

を同じ N に対し $\binom{n}{2}$ 回ほど繰り返せば，高い確率で特定の容量最小カットを見つけることができる．

さて今度は，無向ネットワークの各辺に向きをつけた有向ネットワークを考え，この上で異なる種類の物資を同時に流通させる多品種フロー問題を解こう．この問題は，物資の品種の集合 K，各品種 $k \in K$ ごとに指定されたソース（出発点）$s^k \in V$，シンク（到達点）$t^k \in V$，および輸送量 $d^k > 0$ を入力として持ち，目的は各種の物資をそのソースからシンクへ決められた輸送量だけ同時に流通させるための定常的な経路（＝フロー）を獲得することである．すなわち，正確には次の流量保存則（1）および容量制約（2）を満たすフロー $f^k(e) \geq 0$，$e \in E$ を求めることである．

(1)

$$\sum_{e \in OUT(v)} f^k(e) - \sum_{e \in IN(v)} f^k(e) = \begin{cases} 0 & (v \neq s^k, t^k) \\ d^k & (v = s^k) \\ -d^k & (v = t^k) \end{cases}$$

(2) $\Sigma_{k \in K} f^k(e) \leq c(e) \ \forall e \in E$

ただし，$IN(v)$，$OUT(v)$ はそれぞれ v に入る辺，v から出る辺の集合とする．ここでは，ネットワーク内で同期を取り，物資を1ラウンドで辺1本分だけ移動させるフロー制御を行ない，これから（1），（2）を満たすフロー f^k を求める算法[2]を紹介する．各頂点 v に対し，そこから出ている有向辺 $e \in OUT(v)$ および品種 $k \in K$ の組ごとにバッファを用意し，そこに溜まっている品種 k の物資の量を $q^k(tail(e))$ で表わす．同様に，v に入っている辺 $e \in IN(v)$ に対しても品種ごとにバッファを用意し，そこに溜まっている k の物資の量を $q^k(head(e))$ で表わす．そこで，次のフェーズ1～4の一回りを1ラウンドとする．

フェーズ1：各品種 $k \in K$ に対し，そのソース S^k から物資を d^k だけネットワークに流し込む．

フェーズ2：各有向辺 e に対し，e の始点から終点への物資 k の移動量 $g^k(e) \geq 0$ を“現時点でバッファ内に溜まっている物資の量 $q^k(tail(e))$，$q^k(head(e))$，$k \in K$ にもとづき”適当に決定し，$q^k(tail(e)) := q^k(tail(e)) - g^k(e)$，$q^k(head(e)) := q^k(head(e)) + g^k(e)$ と更新する（ローカルな情報にだけもとづくことに注意）．

フェーズ3：各品種 $k \in K$ に対し，そのシンク t^k の持つバッファ内に溜まった品種 k の物資をすべてネットワークから取り除く．

フェーズ4：各頂点 v に対し，v 内の同じ品種 k に対するバッファ内の物資の量を均等になるように v 内で再配分する．

全体のアルゴリズムはこのラウンドを何回か繰り返すだけである．ここでは詳細を省くが，q^k に依存する一種のエネルギー関数を想定し，これを最小化するようにフェーズ2では $q^k(e)$ が決定される．このエネルギー関数をうまく定義すると，（問題が実行可能なら）ネットワーク内に滞留する物資量が有限となることが示せるので，十分ラウンドを繰り返せば長い目で見てネットワークに流し込んだ量と取り出した量の比が1に近づく．したがって，各ラウンドでの物資の移動量 $g^k(e)$，$k \in K$，$e \in E$ をすべて重ね合わせ，ラウンド数で割れば（1），（2）を満たすフローが得られる．実は，ネットワーク内に残留する物資のため（1）は厳密には満たされず，輸送量 d^k のうちわずかな分を犠牲にするような実行可能解が得られるので，これは近似アルゴリズムである．このアルゴリズムは単純であるだけでなく，フェーズ2では e に関するローカルな情報だけが必要なので並列アルゴリズムや分散アルゴリズムとして利用するのにも適している．

以上簡単に紹介したように，従来から理論的には効率よく解けると知られていた問題にも新たに直感に訴える単純なアルゴリズムが発見される可能性があり，アルゴリズムの設計はまだまだ魅力ある研究であると言えよう．実際に企業で取り扱われる問題はもっと複雑なモデルで表現されるであろうが，確率アルゴリズム，近似アルゴリズムの手法を使えば思いがけない新しい切り口が潜んでいるかもしれない．

参考文献

[1] D. K. Karger and C. Stein ; An O(n^2) algorithm for minimum cuts, Proc. of the 25th ACM Symp. on Theory of Comp., pp. 75-765, 1993.

[2] B. Awerbuch and T. Leighton ; A simple local-control approximation algorithm for multicommodity flow, Proc. 34 th IEEE Symp. on Found. of Comp. Science, pp. 459-468, 1993.