Transient analysis of fluid approximation model for multi-entry queueing system in ATM statistical multiplexing

田中 武志
(東京工業大学理工学研究科情報科学専攻 現所属：㈱東芝)
指導教官 高橋幸雄教授

1．はじめに

近年，通信に対するニーズの多様化に対処するため，音声，データ，静止画像，動画像などさまざまな特性を持つトラヒックをデジタル形式で伝送することができる通信網 ISDN (Integrated Services Digital Network) の構築が計画されている．ISDN の基本となる通信方式は ATM (Asynchronous Transfer Mode) と呼ばれている．これらのトラヒックはセルと呼ばれる固定長のデータユニットに分割され，ネットワーク内のノードに入る．

ISDN のノードにおける混雑現象を扱うために，バースト性などセルが持つ性質を利用してセルの流れを連続量である水の流れで近似した流体近似モデルが既存の研究として考察されている．そのほとんどは定常解析であり，扱われている一番広いモデルは各入力回線における入力率がマルコフ連鎖の状態に依存して変わる MMIR (Markov Modulated Input Rate) モデルである [2]．最近では，過渡解析の研究も行なわれ Kobayashi et al. により on／off 区間長がそれぞれ独立な指数分布に従う on-off-type 流体近似モデルについて解析が行なわれている [1]．しかしまだ完全な形では解かれていない．

本研究では ISDN のノードにおける混雑現象が時間とともにどのように変化するのかを確率的に分析することを目的とし，動画像なども扱える MMIR モデルにおける過渡解析を行なう．この際システムの挙動は連立偏微分方程式を用いて表現することができ，それを解くことによって過渡解の時刻に関するラプラス変換を陽な形で求めることができる．この結果は Kobayashi et al. の制限されたモデル[1]に対する結果よりもさらに1歩進んだものである．この解の導出では後で述べる $(sI-M)D^{-1}$ という行列の固有値，固有ベクトルの性質が鍵となる．本研究の特色はこの固有値，固有ベクトルの性質を詳しく調べそれらを用いて解を陽な形で表現したことである．なお本研究にあたっては指導教官とともに筑波大学の橋田温教授に大変お世話になった．この場を借りて感謝の意を表したい．

2．MMIR モデルの定式化

実システムとの対応から，まず MMIR モデルの特殊ケースである on-off-type 複数入力回線待ち行列モデルについて定式化する．K 本の入力ソース，1本の出力回線および大きさ無限のバッファーを持つノードを考える．K 番目の回線における on 区間長，off 区間長はともにある相型分布に従うと仮定すると，K 番目の回線における on／off の推移はマルコフ連鎖となり，その推移速度行列 $\mathbf{M}^{(K)}$ は相型分布のパラメータを用いて書くことができる．また，サーバーにおける一定サービス時間を $1／c$，k 番目の回線の on 区間内におけるセルの到着間隔を $1／r^{(k)}$ とする．

セルの到着間隔は一定でしかも on／off 区間長に比べて非常に短いので，セルの流れを連続量である水の流れとして，また on／off 区間を水道の蛇口の開/閉区間として流体近似することができる（図1）．このようにして得られた on-off-type 流体近似モデルにおいては c をサービス率，$r^{(k)}$を k 番目の回線における入力率と考えることができる．このときバッファー蓄積量 $Q(t)$ は連続状態をとる．$I^{(k)}(t)$ を時刻 t における K 番目の回線の on／off の推移を支配するマルコフ連鎖の状態とするとベクトル過程 $(I^{(1)}(t),\cdots,I^{(k)}(t),Q(t))$ は離散・連続状態を持つマルコフ過程となる．

各入力回線は独立であると仮定しているので，入力相過程 $I(t)=(I^{(1)}(t),\cdots,I^{(k)}(t)$ は推移速度行列 $\mathbf{M}=$

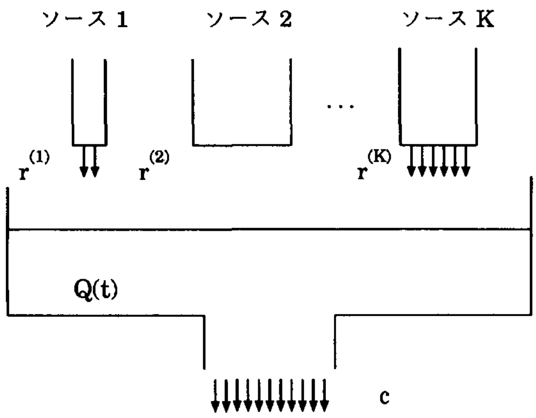

図1　流体近似モデル

$M^{(1)}\oplus\cdots\oplus M^{(K)}$を持つマルコフ連鎖である．ただし$\oplus$は行列のクロネッカー和を表わす．また，$M^{(K)}$と同じサイズの行列$R^{(K)}$を

$$R^{(K)}=\begin{pmatrix} r^{(K)}I^{(K)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると，行列$R=R^{(1)}\oplus\cdots\oplus R^{(K)}$は全回線における入力率を支配する行列となる．

ところで，音声，データはon-off-typeの入力を持っているが，動画像は入力率が変動する．そのため入力率がon／off以外にも変動するモデルに拡張したい．3.1節で述べるように過渡解の導出は，行列Mがエルゴード的マルコフ連鎖の推移速度行列，Rが非負の要素を持つ対角行列であることのみを利用している．そこで一般にM，Rがこれらの条件を満たすというモデルに拡張する．このモデルがMMIR（Markov Modulated Input Rate）モデルである［2］．

以下の議論では安定条件$\bar{r}-c<0$を仮定する．ただし，$\bar{r}=\mu Re=\Sigma_{i=1}^{N} r_i\mu_i$であり，$\mu=(\mu_i)$は入力相過程$I(t)$における定常確率ベクトル，$N$は行列Rのサイズ，iは入力相過程$I(t)$の状態，$r_i$は行列Rの$i$番目の要素である．また議論を簡単にするため対角行列$D=R-cI$は逆行列を持つなど，いくつかの緩い条件を仮定する．

3．MMIRモデルの解析

3.1節ではベクトル過程$(I(t),Q(t))$がマルコフ過程であることを利用し，システムの挙動を表わす連立偏微分方程式を導く．そこで$\pi(t,i,x)=P\{I(t)=i, Q(t)\le x\}$，$\boldsymbol{\pi}(t,x)=(\pi(t,1,x),\cdots,\pi(t,N,x))$とするとベクトル$\boldsymbol{\pi}(t,x)$は次の連立偏微分方程式を満たす．

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\pi}(t,x)=-\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\pi}(t,x)D+\boldsymbol{\pi}(t,x)M\,(x\ge 0)$$

このとき，境界条件は$\pi(t,i,x)$が確率であることと，$r_i-c>0$となる状態$\{i\}$に対して$\pi(t,i,0)=0$であることである．また，初期条件は$I(0)=i_0$，$Q(0)=x_0$として与える．

3.2節では過渡解の時刻に関するラプラス変換を$\boldsymbol{\pi}^*(s,x)=\int_0^\infty e^{-st}\boldsymbol{\pi}(t,x)\,dt$と定義し，$\boldsymbol{\pi}^*(s,x)$を求める．そのため，上式の両辺に対して時刻に関するラプラス変換をとる．

$$\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\pi}^*(s,x)D=-\boldsymbol{\pi}^*(s,x)(sI-M)+\boldsymbol{\pi}(0,x)$$

これを，$\boldsymbol{\pi}^*(s,x)$に関して解くと次の式が得られる．

$$\boldsymbol{\pi}^*(s,x)=\boldsymbol{\pi}(0,x)(sI-M)^{-1}\{I-e^{-(sI-M)D^{-1}(x-x_0)}\}+\boldsymbol{\pi}^*(s,0)e^{-(sI-M)D^{-1}x}$$

ここで，$\boldsymbol{\pi}^*(s,0)$は境界条件より決めなければならない．この際，鍵となる行列$(sI-M)D^{-1}$の固有値θ_j，右固有ベクトル$\boldsymbol{v}_j$，左固有ベクトルu_jを利用する．ただし，θ_j，$\boldsymbol{v}_j$，u_jはsの関数である．すると次の定理が得られる．

Theorem 3.3.1

$$\boldsymbol{\pi}^*(s,0)=h_{i0}D^{-1}V^-(\Theta^-)^{-1}e^{\theta^- - x_0(E-V^-)^{-1}E^-}$$

ここで，Θ^-は実数部分が負となる固有値θ_jを対角要素に持つ対角行列，V^-は対応する右固有ベクトル$\boldsymbol{v}_j$を横に並べた縦長の行列，E^-は単位行列Iにおいて対角行列Dの負の要素がある行を取り除いて作られる横長の行列，h_{i_0}はi_0番目の要素が1，その他は0である行ベクトルである．

3.4節ではMMIRモデルの特殊ケースであるon／off区間長がそれぞれ独立な相型分布に従うon-off-type流体近似モデルを考える．このモデルでは行列$(sI-M)D^{-1}$がon／off区間長分布などで具体的に書けるため，その固有値θ，右固有ベクトル$\boldsymbol{v}$，左固有ベクトル$\boldsymbol{u}$はサイズが小さな方程式を解くことによって求めることができる（Theorem 3.4.1）．最後に3.5節ではRelaxation timeについて考え，その下限を求めている．なお，詳しい条件および結果については，本論文を参照していただきたい．

参考文献

［1］ Kobayashi, H. and Ren, Q. (1992)
［2］ Stern, T. E. and Elwalid, A. I. (1991)