OR メモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた智恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

チャレンジ最長片道きっぷ

山路 航太，林 宏明

このメモは，東京工業大学経営システム工学科の3年生後期の実験科目「モデル化とシミュレーション」のレポートに，少し手を加えてもらったものである．この授業ではシミュレーション手法の習得に加えていくつかの総合的な演習を行なっている．われわれは，興味のあること何でもよいから自分なりにモデル化して考えてみたらという，いい加減なORの自由課題を出している．問題設定，あるいはモデル化の段階で多少の相談に乗り，トライした結果を最後2回ほど時間をとって，みんなの前でOHPを使ってプレゼンテーションしてもらう．

毎年，学生らしい発想のユニークな発表が行なわれる．昨年度の発表の中からその1つを，稚拙ではあるがメモランダムとして投稿させていただいた．後で聞いたところでは，この問題は鉄道マニアの間では飼い馴らされた問題とのことであったが，線形計画法で曲がりなりにもアプローチしたことを評価した．

(森　雅夫，矢島安敏)

1．最長片道きっぷとは

日本全国のJRの総営業キロは19,953.1 km(1993年12月現在)になる．このJRのネットワークを用いて，最長片道きっぷの経路を求めてみた．

はじめに「最長片道きっぷ」とは同じ駅を2回以上通ることができない経路で最も長い距離を乗ることができる切符と定義する．つまり，スタート地点からゴール地点まで1本の線で結ばれ，交わることがないコースになるということである．したがって，一般に言われている一筆書きとは異なる．

問題を解くにあたって，スタート地点は九州内でゴール地点は北海道内であるという仮定をおく．これは本州と九州を結ぶ路線は1路線(関門トンネル)，本州と北海道を結ぶ路線は1路線（青函トンネル）だけということによる．すなわち同じ駅を2回通ることができないために北海道と九州を最長経路に加えるためには，その島内にスタート，ゴール地点がなければならないということになる．また北海道の路線は全国の約13％，九州は約10％であるので最長経路はこの2島を通ると考えられる．なお四国も本州とは1カ所で結ばれているが，四国は全国の約4％なので無視して考えた．

この仮定をおくことによって全国を九州，本州，北海道の3つに分けて，九州内の最長経路，本州の下関から青森までの最長経路，北海道内の最長経路をそれぞれ求めればよくなる．

2．問題のモデル化

この問題を整数変数を使った数理計画問題としてモデル化して解いた．まず，分岐点と分岐点を結ぶ鉄道を路線と呼び，その各路線に変数 L_i を与える．そして路線 i を通る時に $L_i=1$，通らない時には $L_i=0$ となるようにする．

また各路線の距離を D_i とすれば，目的関数は

$$\text{Max} \sum_{1} D_i L_i$$

となる．

次に制約式を考える．分岐点に着目すると，図1のような分岐点を通る場合には，その分岐点に接続している路線のうち2本を通ることになり，$L_1+L_2+L_3=$

やまじ　こうた，　はやし　ひろあき
東京工業大学　経営システム工学科
〒152　目黒区大岡山2-12-1

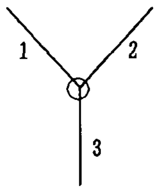

図1

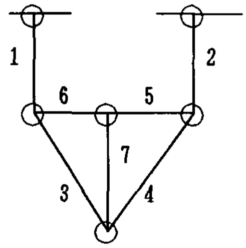

図2

2となる．また，その分岐点を通らない場合には接続している路線をすべて通らないことになるので，$L_1+L_2+L_3=0$となる．

このように考えることによって接続する路線の本数にかかわらず，各分岐点kで次の式が満たされる．

$$\sum_{i\in L(k)} L_i=2 \quad (\text{分岐点}\,k\,\text{を通る場合}),$$
$$\sum_{i\in L(k)} L_i=0 \quad (\text{分岐点}\,k\,\text{を通らない場合}).$$

ここで，$L(k)$は分岐点kに接続する路線の集合である．しかし，このままでは扱いにくいので改良する必要がある．

再び，3本の路線が接続する場合（図1）について考えると次の4本の不等式によって上の条件を満たすことがわかった．

まず，2本より多い路線を通ることはないという条件より

$$L_1+L_2+L_3\leqq 2$$

となる．1本だけ通ることはないという条件より次の3式が成り立つ．

$$L_1-L_2-L_3\leqq 0,$$
$$-L_1+L_2-L_3\leqq 0,$$
$$-L_1-L_2+L_3\leqq 0.$$

1本だけ通るときには，この不等式のうち1本が正になる．n個の路線が接続している場合にも同様に不等式をたてればよい．すなわち，

$$\sum_{i\in L(k)} L_i\leqq 2,$$
$$L_i-\sum_{\substack{j\in L(k)\\ j\neq i}} L_j\leqq 0$$

となる．

3．サイクルの除去

上で述べた制約式だけでネットワークの最長経路を求めると図2のように始点と終点を結ぶ経路のほかにサイクルになる経路が存在してしまうことがある．これを除去するためには，新しい制約式が必要になる．

サイクルを取り除くためにはそのサイクルを構成する路線をすべて通ることはないという条件を入れてやればよい．すなわち，図2では$L_3+L_4+L_5+L_6\leqq 3$という制約式である．一般的には次のような制約式になる．

$$\sum_{i\in C} L_i\leqq n-1$$

ただし，ここでCはn路線でサイクルを構成する一組の路線の集合である．

しかし，この制約では大きなネットワークではたくさんのサイクルが発生し解を求めるのに手間がかかる．そこで明らかにサイクルを構成する路線のうちいくつかは最長経路に含まれると考えられるときには新しい条件を使った．それはサイクルを構成する路線の一部を最長経路にくみ入れるために，始点と終点を結ぶ経路とサイクルとを接続する路線を少なくとも1路線以上は通るという条件である．

図2では$L_1+L_2\geqq 1$という制約式である．この条件を入れると最適解は保証されなくなってしまうが制約式は少なくすることができる．つまり，図2では$L_3\sim L_4\sim L_5\sim L_6$, $L_3\sim L_6\sim L_7$, $L_4\sim L_5\sim L_7$というサイクルの可能性があるが$L_1+L_2\geqq 1$を入れることでこれらのサイクルはなくなる．しかし，できるだけこの制約式は使いたくないので実際にはサイクルが10路線以上から成るときにこの制約式を使った．

また，実際の路線図で計算を行なう場合，サイクルの発生場所は実行してみないとわからないので，実行結果を見てからサイクルを除去したので多少の手間はかかった．だが，以上のような制約式を使って最長経路を求めた．

4．本州の解き方

仮定より，本州は下関から青森までの最長経路を求めればよい．しかし，路線数が200以上になるので実行時間が長くなる．また，サイクルの除去に手間がかかることも予想されたので，次のような工夫をした．

本州の路線図を見ると，ある断面ではその断面を横切る路線が少ない所がある．ここでは，次の3つの切断面を考えた．

断面1：山陰本線の和田山－福知山間と山陽本線の姫路－加古川の間を通る

断面2：北陸線の富山－糸魚川間，中央線の名古屋－塩尻間，東海道線の名古屋－豊橋間を通る

断面3：羽越線の新発田－坂町間，東北線の郡山－福島間，常磐線の平－岩沼間を通る．

断面1においては路線が2線しか通っていない．断面2では3線，断面3でも3線しか通っていない．この3ヶ所の断面によって，本州を大きく中国・関西・関東・東北を含む4地区に分割することにした．

すると，下関から青森まで行くためには，これらの断面の通り方によっていくつかに場合分けできる．まず，断面を2線が横切る場合（断面1）はどちらか1路線を通ることになる．そこで，はじめに下関から断面1の2路線までの最長経路を求めれば，本州の最長経路はそのどちらかを必ず通るので，中国地区には2つの経路の候補が存在することになると考えられる．

次に3線による断面を考える．断面2を例にすると，断面の横切り方として次の5通りが考えられる．すなわち，これら3線のうち1路線しか通らない場合において次の3通り

(1) 関西 → 北陸線 → 関東

(2) 関西 → 中央線 → 関東

(3) 関西 → 東海道線 → 関東

である．

次に，2路線しか通らない場合はありえないので，3路線を通る場合を考えると，全部で6通りの通り方があるがうち4通りは途中で重なってしまうので不可能である．よって次の2通りが可能である．

(4) 関西 →北陸線 →関東 →中央線
→関西 →東海道線 →関東

(5) 関西 →東海道線 →関東 →中央線
→関西 →北陸線 →関東

したがって，関西地区に注目するとこの5通りについてそれぞれの関西地区における最長経路が存在することになるので，それを求めればよい．つまり，下関から(中国地区の候補を1つ通って)北陸線までの最長経路，同様に中央線，東海道線までの最長経路，また下関から北陸線までと中央線と東海道線をつなぐ経路の和の最長経路と下関から東海道線までと中央線と北陸線をつなぐ経路の和の最長経路を求めればよい．次に，東北地区でも同様に5通りを求める．そして，最後にこれら関西，東北のそれぞれの候補のうち1つを通る条件を加えて関東地区を求めればより解を楽に求めることができた．

5．九州・北海道の解き方

九州・北海道の最長経路を解くにあたっての問題は，スタート地点になる駅がわからないということである．つまり，九州ならば下関から最も遠くになる駅を求めるということが問題になるのである．そのスタート地点になり得る駅の候補としては次の2通りの駅が上げられる．

イ）行き止まりの駅（例　長崎）

ロ）分岐点の隣の駅（例　肥前白石）

ロ）はその分岐点に向かって進んでいた時に，その分岐点をすでに通っていたら，その手前の駅でストップしてしまうという条件である．この問題を解決するには分岐点の隣の駅からダミー路線を作って，これらのダミー路線と行き止まりの路線のうちの1つだけ通るように制約式を追加すればよい．その結果がダミー路線を通るようになれば，その分岐点の隣の駅がスタート地点となる．

6．結　果

以上の計算方法に従って，LINDOを用いて「最長片道きっぷ」の経路を求めた．北海道の日高本線・様似駅から佐賀県の長崎本線・肥前白石駅までの11,226.4 km，JR全線の約56％に乗車できる．

得られた経路を示した図を載せられるとよいのだが，かなり複雑になり，スペースをとるので割愛させていただくが，東京近郊区の図だけを図3に示す．運賃，所要日数なども算出すればよいのだが，時間がなく断念した．

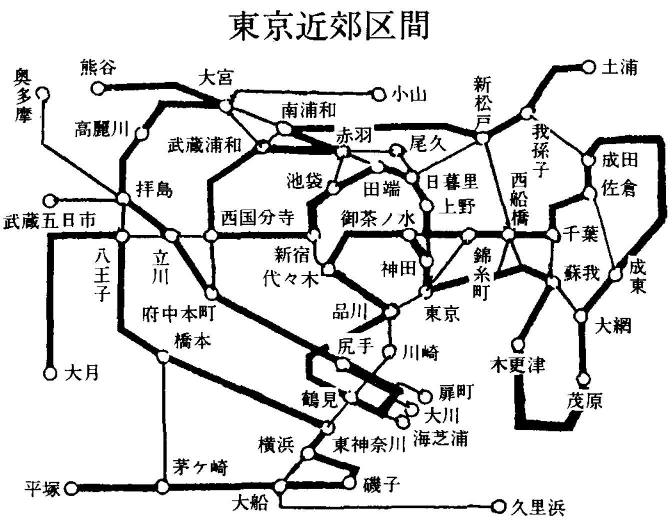

図3　東京近郊区間での経路（太線部　2経路に分ける）