ORメモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた智恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，“新鮮に”，しかも“コンパクトに”表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

視覚化の考察およびその教育への応用

浪平 博人

この小論は，論理的な事柄を視覚的手段を通して教育する工夫過程で考えたことの中間的なまとめである．

教育法へのORの適用のつもりである．

1．視覚処理の強力さ

視覚処理の強力さを表わしたものに“百聞は一見にしかず”という諺がある．また，窓の外の景色を見てそれを部屋の中にいる人に言葉で伝えることの難しさを想像すれば，目で見ることはいかに多くを伝えるかがわかる．

いま，座標軸がかかれた平面がありその上に多くの点がプロットされているとしよう．原点に一番近い点を見つけるとき，一瞬見ただけで候補を絞ることができ，残りのほとんどの点については考えない．したがって，平面上の点の数がいくら多くても，見つけるための工数はあまり増えない．

巡回セールスマン問題を考えてみよう．これは，町の数がnのときは，DP的に探しても$n^2 2^n$の探索が必要とされて理論的には探索が指数的に爆発するNP問題である．も$n^2 2^n$という数は，$n=30$でも1億の1万倍である．しかし，30個の町が視覚的に地図上にプロットされていれば，人間はこれを“はった”と眺めて，もちろん最適なルートは見つからないにせよ，かなりよいルートを見つけている．これも，視覚処理の強力さを示すものであろう．

2．処理の効率についての考察

ここで，処理の効率についていくつかのケースに沿って考えてみよう．

いま，n個のデータがファイルされたものがあり，与えられたxをファイル中から探しだす場合を考える．

なみひら ひろと 産能短期大学
〒158 世田谷区等々力6-39-15

以下で，$T(n)$はn個のデータのファイルよりxを探し出すに要する最大の（一番運の悪い場合の）工数とする．

ケース1：ファイルのデータが乱雑に並べられているとき

この場合は，ファイルのデータを1つ調べれば，あと（$n-1$）のデータを調べる仕事が残る．したがって，次のようにかける．

$$T(n)=1+T(n-1)$$
$$T(2)=1 \text{ として,}$$
$$T(n)=n-1=O(n)$$

ケース2：ファイルのデータがソートされているとき

この場合は，2分探索法でファイルの中央のデータとxとの比較を1回行なうことにより，xは前半か後半のいずれかにあることがわかる．したがって，次のようにかける．

$$T(n)=1+T(n/2)$$
$$T(1)=0$$

これを解けば，

$$T(n)=\log_2(n)$$

ケース3：ファイルはソートされており，さらに，xがありそうな場所の予測ができるとき

xがファイルの頭からnp（$0<p<1$）の位置にありそうであるという予測があったとしよう．この予測の意味することは，1つ1つのデータはpの確率でxより小さいということである．そのようなデータがn個集まったものがファイルであるので，実際のxの位置はnpを中心に標準偏差$\sqrt{np(1-p)}$の正規分布をする．npを中心に標準偏差の何倍かで区間を囲めば，目的のxは1に近い確率でその中にある．すなわち，予測ができる場合，その中心点を1回探せば次に探す区間が$\sqrt{n}$のオーダで狭まることになる．これを$T(n)$を用いてかけば，次のようになる．

$$T(n)=1+T(\sqrt{n})$$

$$T(2)=1$$

これを解けば，

$$T(n)=\log_2(\log_2(n))$$

以上３つの処理の効率を考えたが，この結果から次のことが推察される．すなわち，ファイルデータをランダムからソートに構成を変えることは，データを構造化したことである．これにより，処理の効率はnから$\log(n)$に変わった．また，予測をすることは知的作業を加えることである．構造化されたデータの処理にさらに知的作業を加えれば，効率はもう１段のlogでアップし，$\log(\log(n))$ になる．

ここで，１つの規則性が見いだされ，構造化や知的作業は工数をlogで縮めるということが推察される．

これを一般化すれば，n個からの検索の工数が$\log(\log(\cdots(\log(n)\cdots))$であるような知的プロセスがあると考えられる．これは，前の段階の効率をさらにlogで縮める知的プロセスの存在である．このことは形式的には，集合のベキ集合で元の集合より濃度の大きい集合ができるという集合論の方法とよく似ていると筆者は感じているが，皆さんのご意見を伺いたいところである．

３．視覚処理のメカニズムについて

ここで本論に戻って，視覚処理がなぜ強力なのかのメカニズムについて考えよう．いま，nの複雑さをもつものの視覚処理を，次のようなプロセスで行なうと仮定しよう．『nの処理を行なうのに，nを半分に分割して２つの$n/2$の処理として平行に行ない，その結果を統合して全体の処理とする』

前節と同じく，nの複雑さの処理に要する工数を$T(n)$と記し，分割処理された２つの統合に要する工数を$f(n)$と記そう．分割した$n/2$の処理は並列に行なわれることに注意して，$T(n)$は次のようにかける．

$$T(n)=T(n/2)+f(n)$$

統合の工数$f(n)$はnに依存するとの期待は自然であろうが，いま$f(n)=c$としてみよう．これは，統合の工数は複雑さnに依存せず定数であるとの仮定，すなわち，統合はパターン認識的に行なわれるとの仮定である．そうすると，

$$T(n)=T(n/2)+c$$

この解は，$T(n)=c\log_2(n)$となる．すなわち，視覚処理は並列処理とパターン認識であるとすれば，その処理の工数がlogであることがいえる．

考えてみれば，人の感覚処理はその強さをlogで測ったものであることの指摘は，フェヒナーがずっと昔に行なっていることである．視覚処理も複雑さをlogで落とす機能を持つのは自然ではあるまいか．

これから先は，さらに粗い議論であるが，筆者はパターン認識について次のように考えている．パターン認識は２つのものが全体として同じか同じでないかを見分ける機能で，動物が敵か敵でないか，安全か危険かを全体として見分ける必要性から発達したものであろう．目はある物を見つめていると次第にそれが見えなくなってくる．すなわち，変わる物に素早く反応するようになっている．これをもって，パターン認識の傍証としたいが，いかがなものか．

４．視覚処理の教育への応用(理論の視覚化)

論理的な事柄の教育において，式で説明したり，手順で説明したり，図を併用したりして各々工夫がなされているが，論理のエッセンスを伝えることは難しい．そこで，視覚処理の強力さを活用した論理的な事柄の教育方法の可能性について考えた．すなわち，論理の具体的に意味するものを“状態を変形する場のプロセス全体”ととらえ，１つの論理ごとに，それが最初に与えられた状態をいかに変形していくかを可視化して，それを連続的に示すことにより論理のエッセンスを伝えることを試みた．これは，コンピュータでしかできないことである．

次に，いくつかの分野において工夫したことの一部をあげておく．

[1] ソートの視覚化：
　シェルソート，クイックソート

[2] アルゴリズムの視覚化：
　再帰処理

[3] 統計の視覚化：
　中心値極限定理

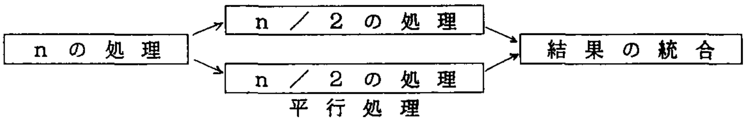
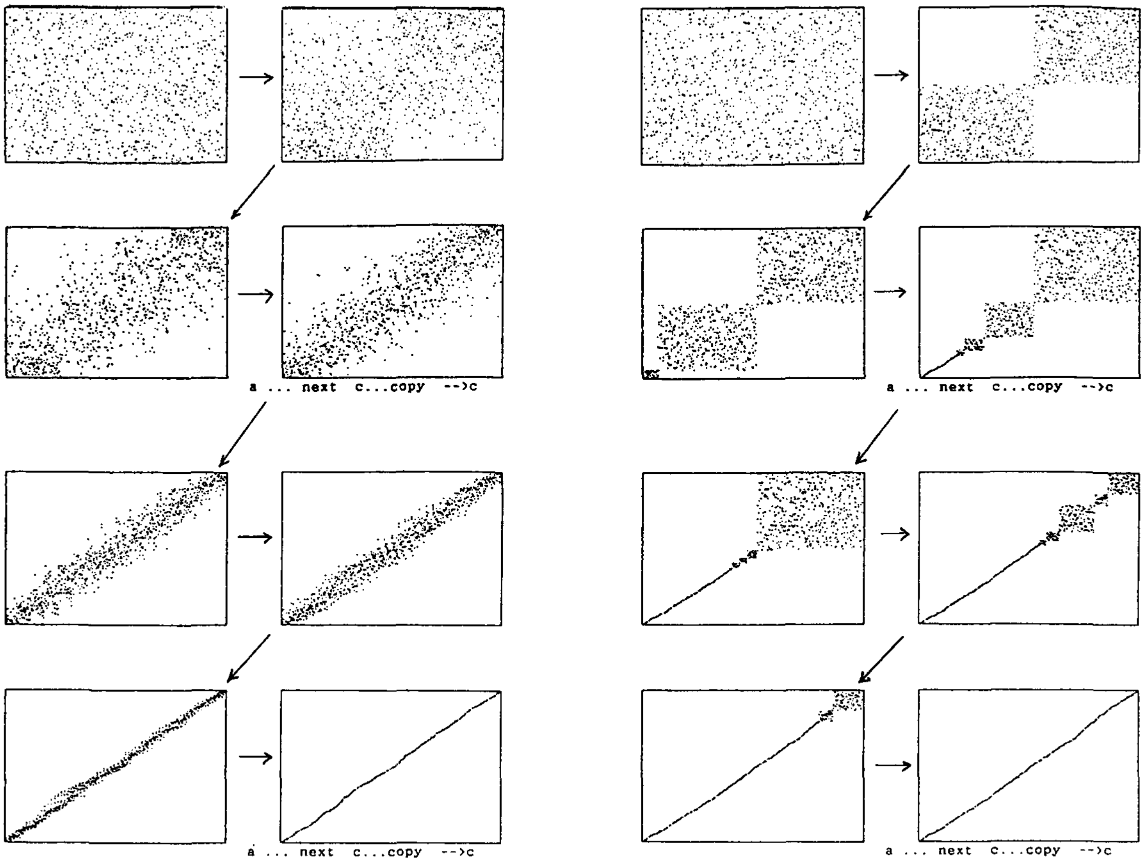


図１　nの複雑さの視覚処理

[4] 代数：
線形変換の視覚化

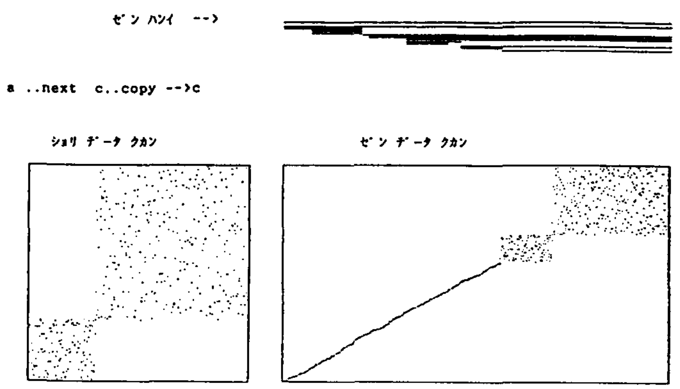
5．今後の発展

この視覚化を通して，筆者自身初めてその意味を理解したことが多く，この方法の有効性は主張できるのではないかと思われる．視覚的な教育から入れば，興味と直感を育てることができ，しかも論理の本質を伝えることができる．ユニバーサルな教育手段として内容を深めたく諸先生方のご協力を願っている．



(a)シェルソート　　(b)クイックソート

図2　ソートの視覚化



再帰処理のプロセスが示されている

図3　再帰処理の視覚化

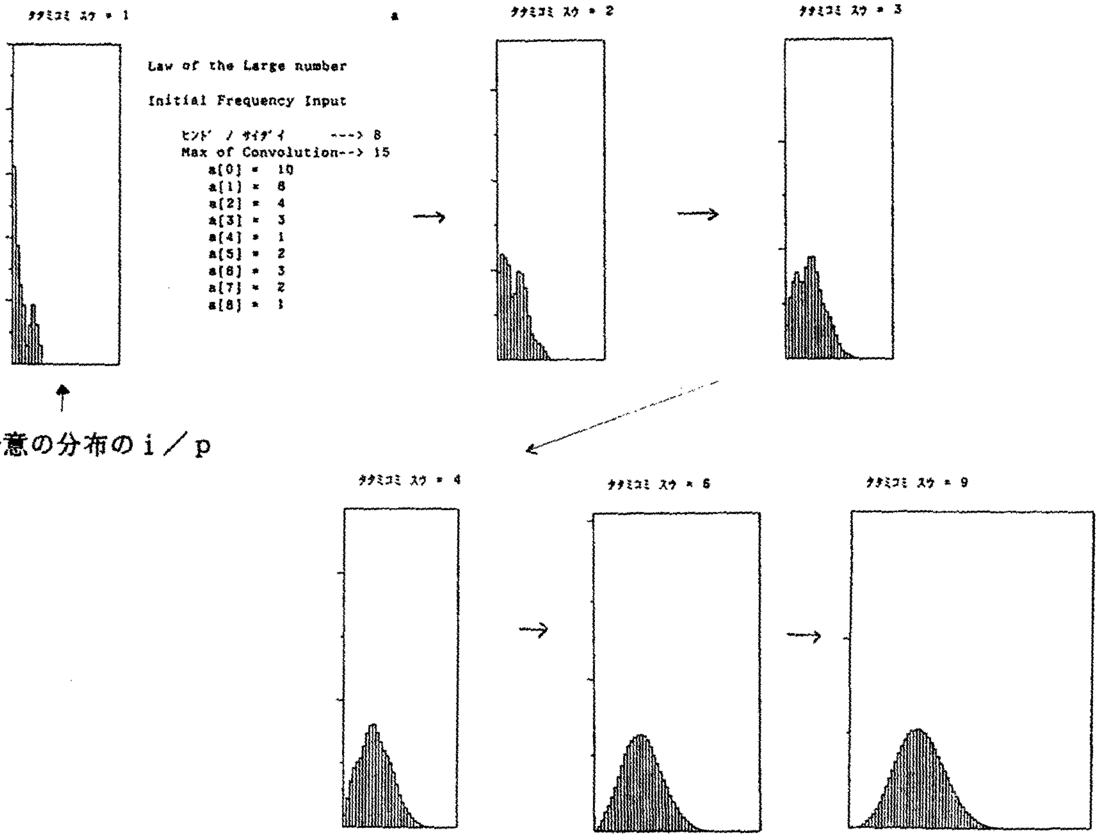


図4　中心値極限定理の視覚化

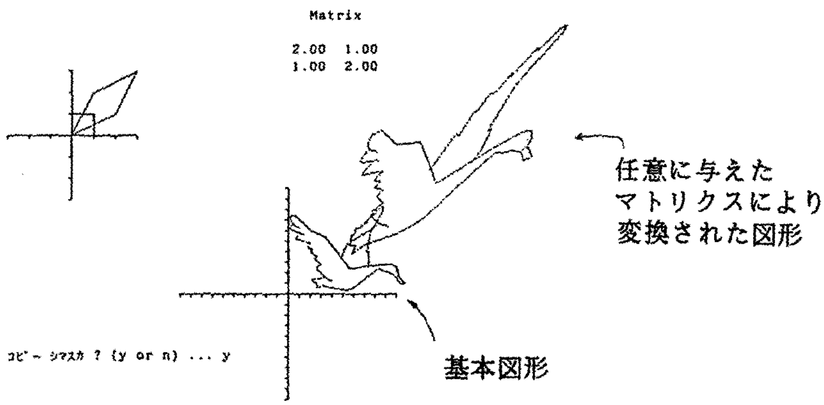


図5　線形変換の視覚化