経済とカオス

原田　康平

1．はじめに

景気変動に関して，「循環的であるが，周期的ではない」という表現がよく見受けられる．耳当りがよく，それなりに尤もらしく感じられながら，改めて考えてみると，これほど情報に乏しい表現も珍しい．循環的という言葉でホワイトノイズが排除され，周期的でないという表現で少数モードからなる系列が除外される．しかし，その両端の境界を明示しない限り，この言葉はほとんどのケースに当てはまることにもなり，結果的に何もいわないに等しい．元来リズミックとされてきた現象も，よく調べれば特有の揺らぎを含んでいるし，不規則とされてきた現象にもそれなりの規則性が内在されていることが多いからである．

近年，経済学の諸分野において，カオスにかかわる多くの報告がなされている[1-12]．この背景には，話題としての新奇さだけでなく，不規則現象に対する道具立ての乏しさへのストレスが感じられる．不規則衝撃理論や自己回帰型の実証分析などは，結局のところホワイトノイズを入力とする線形フィルターの推定でしかなく，既知の入力に対する緩和応答の加算値が得られるだけで，将来の「不規則さ」は予測不能のまま残される．特に恐慌などのドラスティックな変化にはほとんど無力である．一方，周期的な非線形振動だけでは，やはり不規則な現実にリアリティを欠いている．カオス系が示し得た準周期性や間欠性などのバラエティは，まさにシステム内部の要因だけで生み出される「循環的だが周期的でない」現象であって，多くの経済研究者が希求したものでなかったか．

とはいえ，いかなるアイデアであれ，実証による裏付けを得なければ仮説の域を出ない．筆者は，これまで生体信号処理の分野にあって，さまざまの水掛け論に直面してきた．いわく「実用上は線形処理でも十分ではないか」，「これはカオスだ，いや違う」などなど．そして，いくつかの文献をみる限り，経済分野でもあまり変わらない状況ができつつあるように思われる．筆者はカオス理論について門外漢であるが，このような観点から，経済分野におけるカオス研究の現状に触れ，特に実証面での問題点や今後のモデリングの方向について考えてみたい．

はらだ　こうへい　久留米大学　経済学部
〒830 久留米市御井町1635

2．代表的なカオス系

代表的なカオス系としては，May 方程式，Lorenz 方程式や Rössler 方程式，Duffing 方程式などが知られる．すでに優れた解説［13-17］が多数出版されているので，詳細はそちらを参照いただくとして，ここでは簡単に紹介するにとどめたい．

まず，Lorenz 方程式とともにカオス研究の発端となった May 方程式を挙げてみよう．いま，次の方程式で表わされる系を考える．

$$x_{i+1}=ax_i\ (a>1).$$

係数aが1より大きければ，x_iはiとともに指数関数的に発散していく．そこで，xが大きくなると抑制がかかるとして，２次の抑制項を導入し，

$$x_{i+1}=ax_i-bx_i^2\ (a>1,\ b>0).$$

さらに，変数変換をほどこして

$$x_{i+1}=ax_i(1-x_i)$$

とすれば，May の方程式となる．定常解は，aが大きくなるにつれ安定ノード→安定フォーカス→不安定フォーカスと変化して振動解が現われ，さらに分調波が登場して最終的にカオスに至る．つまり，この単純な方程式だけでほとんどのシステムの特徴がシミュレートできることになる．May 方程式におけるカオスの由来についてはすでに詳細な検討が行なわれているが[13, 15]，形式的には図１に示されているパイこね変換と呼ばれる写像系に分類される．

$$x_{i+1}=\begin{cases}2x_i & (x_i\leqq 0.5)\\ 2(1-x_i)\ \text{または}\ 2x_i-1 & (x_i>0.5).\end{cases}$$

ポイントは引き延ばし（係数２）と折り畳み（0.5での反転）にあり，はじめに近接していた２点は引き延ばしによって次第に離れ，折り畳みによりいつかは左右に行き分かれる．つまり，有界ではあるが，不安定

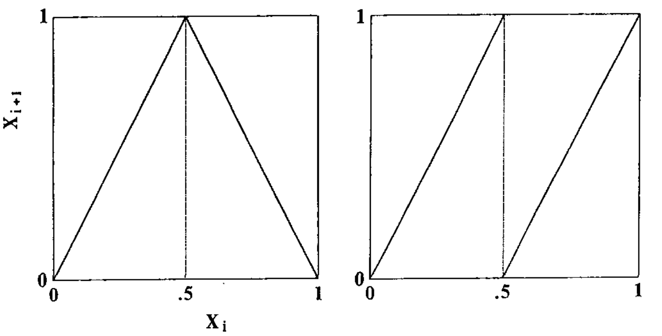

図1　パイこね変換

な軌道が形成される．これがパイこね変換であって，逆写像は1対2になるため，行き別れた2点の由来を逆上ってたどることはできない．

次に，Lorenz 方程式より直観的に理解しやすい次の Rössler 方程式を考えてみよう．

$$\dot{x} = -y - z$$
$$\dot{y} = x + a\,y$$
$$\dot{z} = b + z\,(x - c)$$

いま，$z << 1$として，zの項を無視すれば

$$\ddot{x} - a\,\dot{x} + x = 0$$

と単純化される．ここで，$a > 0$であれば零解は不安定であって，xは次第に増大する．これは May 方程式における軌道の引き延ばしに相当する．そして，xがcを超えると3番目の式によってzが急速に増大し，1番目の式によりxは折り畳まれるように原点近傍に引き戻される．結果として，有界な準周期的振舞いが生み出される．Van der Pol 方程式などと異なり，3次元空間の中ですべての軌道は交差しない．

この他，非線形方程式に強制振動項を加えた，いわゆる強制振動系にもカオスを示すものが少なくない．よく知られたケースが

$$\ddot{x} + c\,\dot{x} + x^3 = A\cos(\omega\,t)$$

の形式で与えられる Duffing 方程式であり，この他，励振 Van der Pol 方程式も適当な条件下でカオス応答を示すことが知られている．生物など，外部から周期刺激を与えやすい場合に，カオス検証の手段として引合いに出されることが多い．

3．経済理論におけるカオス

経済の各分野においても，カオスを取り込んだ多くのモデル分析が試みられている．もともと経済理論には，逓減性に代表されるような非線形性を織り込んだものが多く，すでに数々の非線形モデルが提案されていたため，カオスが導入される素地は十分であったといえよう．詳細は文献［1－7］を参照いただくとして，ここではいくつかの典型例を紹介する．

まず，よく知られている古典的理論に Day のマクロモデル［18］がある．第t期における資本労働比率k_tに対し，

$$k_t + 1 = Ck_t^{a}\,(1 - k_t)^{b}$$

とおくもので，右辺の2項目は pollution など行き過ぎの反動とされる．容易に理解されるように，このモデルはMay方程式の直接的なアナロジーとなっている．

Goodwinは，著書［5］において，May や Rössler，さらに強制振動項を含むカオス系などを基礎とした多数の経済モデルを検討し，経済学のロジックの枠内でカオスを導入することがいかに容易であるかを示している．たとえば，Lorenz［1］が検討した Kaldor タイプのモデル

$$Y_{t+1} - Y_t = \alpha\,\{I_t(Y_t,\ K_t) - S_t(Y_t)\}$$
$$K_{t+1} - K_t = I_t(Y_t,\ K_t) - \delta K_t$$

を考えてみよう．ここで，Y，K，S，I はそれぞれ所得，資本，消費および投資である．逓減性を考慮して，関数IやSは非線形であることが仮定されている．そして一般には，このような方程式をもとに，均衡解や均衡経路の局所的な安定性，パラメータ変化による解のシフトなどが定性的に論じられる．しかし，Iを2次の関数に置き換えるだけで，このモデルは直ちに Hénon タイプの写像系に移行するし，積の項を導入すれば離散化した Lotka-Volterra 方程式となる．同様に，変数や関数の選び方次第で，さまざまのカオス系を案出することはそれほど困難ではない．

さらに Duffing 方程式など，典型的なカオス系のほとんどが経済モデルに移植されているといっても言い過ぎではない．笹倉が提案した Duffing モデル［19］は，太陽活動の周期変動を入力とした経済のカオティックな変動というユニークなアイデアにもとづくもので，Goodwin も同様の可能性に言及している［5］．これらはカオスへのモチーフがむしろわかりやすいケースとなっている．

前述したように，サイクリックな揺動に対して，上下のターニングポイントを陽に表わそうとすれば，最終的に高次の抑制項の形に収まる効果が要請され，一方，周期的な非線形振動だけではイレギュラーな現実のサイクルに対してリアリティを欠くことになる．短期間の間にカオスに関して多くの研究が集中した背景

には，このようなジレンマがあったのではないかと思われる．

さて，前節で紹介した力学系は，一般に低自由度カオスと呼ばれるもので，比較的単純な方程式で表わされる．これに対して，近年，中間自由度のカオスが注目されている[16]．たとえば，非線形振動子を多数カップルした複合振動子系やニューラルネット，セルオートマトンなどで，数十個以上の変数を含み，それらを数個の変数に集約することはできない．従来，マクロモデルは低自由度カオスを中心に展開されてきたが，ゲーム理論やミクロな問題などは，このような中間自由度系の方がフィットしやすいように思える．したがって，このような方向で経済システム特有の力学を解明する試みが今後増えていくのではないか．

4．カオスの実証

あるデータ系列が与えられたとして，それがカオスであると実証できるのか．これまで実際にカオスが見いだされた系としては，流体系や液晶，電子回路，レーザー，化学反応系，神経系などがある[16，20]．いずれも外部から制御可能な系であって，スペクトル分析などにより分岐のプロセスが克明にたどられる一方，図1のようなマッピング（リターンマップとかローレンツマップとも呼ばれる）などにもとづいてカオスであると認定されてきた．しかしながら，経済データのほとんどは一過性であって，パラメータを変えながら各フェーズのデータを揃えることなどほとんど不可能といえる．マップを作成しても，たいていは不規則な分布パターンとなって，判定の材料とはなり得ないケースが圧倒的に多い．このため，一過性の時系列データしか得られない分野では，「相関次元」と「Lyapunov指数」だけがシステムの性質を測る指標として用いられてきた．ただし，Lyapunov指数については，かなりデリケートな量でありながら信頼性の程度を判断する方法がなく，これだけでカオスがあると主張するケースはむしろ少ない．ここでは，話題を相関次元に絞って内容を紹介し，次節でこれまでの経緯と問題点を指摘したい．

いま，ホワイトノイズと正弦波という2つの極端なケースを考えてみる．まず，正弦波

$$x_1=\sin(i)$$

があるとして，これをたとえばX軸上にプロットすると，区間［－1，1］上に分布する．次に適当な間隔mをとって，2次元ベクトル

$$x_1^{(2)}=(x_1,\ x_{1+m})$$

を構成し，$X-Y$平面上にプロットしてみる（このような作業は「埋め込み embedding」と呼ばれる）と，図2aに示されているような楕円状の軌道が現われる．しかし，線状の軌道内に収まるという点で，1次元でのプロットと変わるところはない．さらに

$$x_1^{(3)}=(x_1,\ x_{1+m},\ x_{1+2m})$$

と3次元ベクトルを作って，空間にプロットしても結果は変わらない（図2b）．

次に，$\{x_1\}$がホワイトノイズの系列である場合に同じような埋め込みを行なってみる．図2cおよび図2dに示されているように，プロットは増えた次元分だけ広がり，形として収束する気配を示さない．

この他，2つの振動モードを持つトーラスであれば，1次元のプロットは線上に，2次元は平面上に広がり，3次元も筒状の曲面上に分布する．つまり，1つの振動成分だけからなる場合，埋め込み次元を上げてもプロットは有限の曲線軌道上に収まり，2つのモードを含むときは2次元の曲（平）面内に収まる．このよう

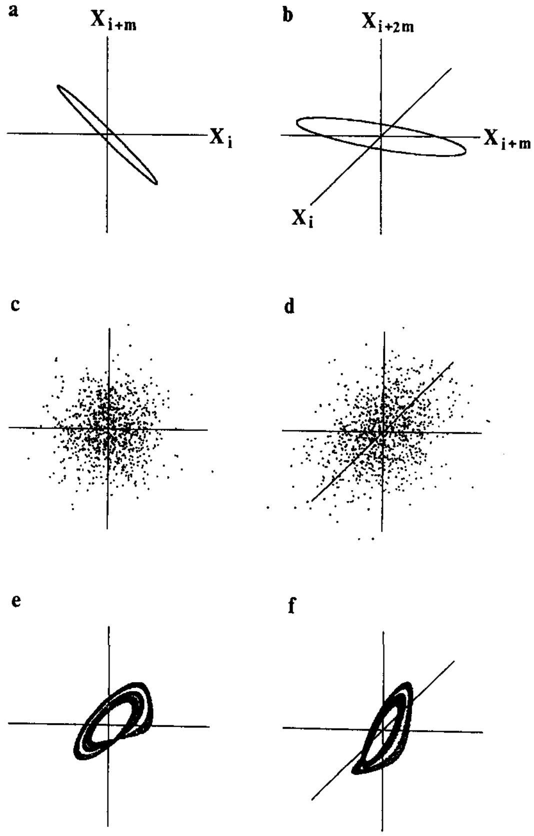

図2　2次元および3次元埋め込み空間における正弦波（a，b），ホワイトノイズ（c，d），およびRössler系（e，f）の分布

な有限次元に収まる軌道はアトラクタと呼ばれる．一方，無限のモードを含むホワイトノイズの場合，次元を上げてもその分だけプロットは拡散する．直観的にいうなら，何次元に収まるかは，何個のモードが含まれるか，あるいはシステムを記述するのに何個の変数が要求されるかに対応する．ちなみに（x_i，x_{i+m}），（x_i，x_{i+m}，x_{i+2m}）などで表わされる軌道は位相空間（x，$\dot{x}$），（x，$\dot{x}$，$\ddot{x}$）上の軌道とトポロジー的に同等である．

最後にカオスの例としてRössler系を挙げてみよう．図２ｅ，ｆに示されているように，Rössler系のカオス軌道は幅を持って折れ曲がった楕円状のパターンを示す．すなわち，１次元では収まらないが，２次元一杯に広がるわけではない．しかもこの範囲内において軌道は安定せず，常に変化する．このようなカオス特有の広がったアトラクタは「ストレンジアトラクタ」と呼ばれている．GrassbergerとProcaccia[21]が提案した相関次元は，このようなアトラクタのストレンジネスに対する直接の指標となっている．

いま，時系列データx_1，x_2，…，x_Nがあるとき，適当な埋め込み間隔mをとって，d次元ベクトル

$$x_i^{(d)}=(x_i,\ x_{i+m},\ x_{i+2m},\ \cdots,\ x_{i+(d-1)m})$$

を構成する．次にすべてのベクトル対のノルムの累積分布関数

$$C^{(d)}(r)=(1/N^2)\Sigma_{(i,j)}H(r-\|x_i^{(d)}-x_j^{(d)}\|)$$

を求める．ここで$H(\ )$はヘビサイド関数である．$C^{(d)}(r)$は相関積分とも呼ばれ，任意の点からまわりを見たとき，半径rのd次元球の中にどれくらいの点があるかを示す．正弦波の場合，dの値を問わず，d次元空間内で$x_i^{(d)}$は曲（直）線上にあり，半径rが十分小さければ，半径rの球内の点数はrに比例する．すなわち，

$$C^{(d)}(r)\propto r^1,\ r<<1\ (d=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\lim_{d\to\infty}\ \lim_{r\to 0}\ \frac{\partial \ell n C^{(d)}(r)}{\partial \ell n r}=1$$

となる．２次元トーラスでは，$d=1$でプロットは直線上，２次元以上で曲（平）面に分布し，

$$C^{(1)}(r)\propto r^1,\ r<<1$$

$$C^{(d)}(r)\propto r^2,\ r<<1\ (d=2,\ 3,\ \cdots)$$

で，$d\to\infty$の極限値は２である．ホワイトノイズの場合，d次元の状態点はd次元球全体に広がり，

$$C^{(d)}(r)\propto r^d,\ r<<1\ (d=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\lim_{d\to\infty}\ \lim_{r\to 0}\ \frac{\partial \ell n C^{(d)}(r)}{\partial \ell n r}=\infty$$

ホワイトノイズに対する実際の計算例を図３に示した．このプロットはGrassberger-Procaccia（Ｇ－Ｐ）プロットと呼ばれ，$r<<1$の領域の傾きから相関指数と呼ばれるrのべき指数が知れる．そして，$d\to\infty$で相関指数が有限値に収束したとき，相関次元と定義される．正弦波と２次元トーラスの相関次元はそれぞれ１，２となり，ホワイトノイズは有限の次元値を持たない．

ではカオスの場合，相関次元はどうなるのか．容易に想像されるように，strangenessは整数値からのずれとして検出される．Rösslerでは２より幾分小さい値となり，Hénonでは1.25ほどの値になる．したがって，相関次元を推定して，それが有限の非整数値となれば，そのデータが比較的低自由度のカオス系に由来する強い証拠となるはずである．

相関次元の特徴は，計算アルゴリズムの単純さと，何よりもその定量性にあるといえる．たとえば，狭帯域に制限されたホワイトノイズを位相空間に埋め込めば，いかにもストレンジアトラクタのようにも見え，区別はつきにくい．マッピングによる判断がほぼ次元１～２の低次元カオスに限られる由縁であり，３以上となると，このような指標によらざるを得ない．

このような利点を受けて，相関次元推定は多くの分野で試みられ，ホットなカオス論争を巻き起こす契機となった．しかし，シミュレーションであれば，計算精度，データ量ともにほとんど制限を受けないが，現実のデータはさまざまの制約を伴う．したがって，同じ対象についてさえ「次元4.4だ」，「いや有限値ではない」という相反する結論が登場する．筆者は，これまでα波という脳波成分のカオス性に関して，この種の議論に遭遇してきた[22, 23]．そこに総括されている一覧表は，このテーマに寄せられてきた多大の時間と労力の証しであり，現在も多くのところで継続されて

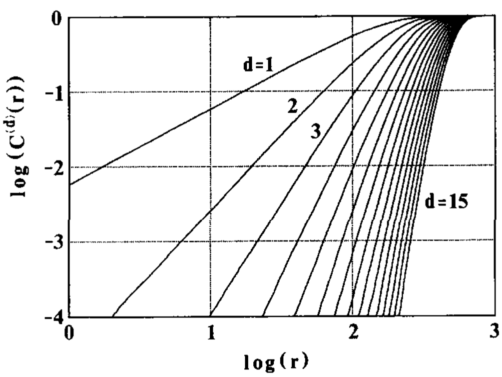

図３　ホワイトノイズのＧ－Ｐプロット

いる．そして，次節で述べるように，経済分野でも同じことが再現されているように思える．

5．経済におけるカオスの実証

経済分野におけるパイオニア的研究としてMandelbrotを挙げる必要があろう．彼はフラクタル幾何学の先駆者として知られるが，価格変動などのフラクタル性に関しても詳細な検討を行なっており（内容は「フラクタル幾何学」[24] に要約されている)，予測やモデル化に際してGaussianを仮定することの無意味さを強調している．カオスとフラクタルは不可分の関係にあって，相関次元もフラクタル次元と密接に関わり合っている [16].

わき道にそれるが，武者は交通量や株価変動のスペクトル分析を行ない，これらが1/f ノイズであることを示している [25]．1/f ノイズはフリッカノイズとかピンクノイズ（ホワイトとブラウンの中間）とも呼ばれ，自然界にごく一般に観察されながら，その起源は未だ明らかにされていない．この1/f ノイズも，どの周波数帯域で見ても同じ特性という意味で，フラクタル性を内包している．

さて，具体的にカオスという言葉を伴う実証研究は相関次元の案出以降であって，1980年代後半にほぼ出揃っている［3，7－11]．いずれもGNPや金利変動などについて次元推定を試みたもので，positive，negativeの結果が錯綜している．筆者も，**図4**に示した米国GNPの結果から，次元4.2という値を遠慮がちに提出した経験がある [12]．肯定論は，おおむね3～7の次元値を提出し，否定論はデータや推定方法の難点を挙げて，それらの値が信頼できないことを指摘している．初期の段階での分析結果に関しては Lorenz による要約 [3] が印象的というべきで，一言でいうなら「カオスであるとの主張のいずれも厳密なチェックに弱みを持ち，現段階でカオスと断定できる明瞭な証拠はない．しかし，カオスの可能性もいまだ排除されてはいない」となる．

では，なぜこのような曖昧な議論に終始するのか．その理由は，相関次元推定のデリケートさに集約される．たとえばホワイトノイズをローパスフィルターに通せば，**図5**のように，G－Pプロットは肝心の領域で歪んでくる．この例は2000点のデータを対象としているため，システマティックな歪みとして判読できるが，データ数が少なければ，誤った値を取り出してしまう危険性は高い．この他，埋め込み間隔やG－Pプロットでの傾き推定法なども影響を与え得る[23]．もっとも大きい要因はやはりデータ長とデータに課された歪みというべきであろう．データ長については，信頼できる推定のためには次元4程度で1万個程度のデータが必要との指摘もある[16]．月次データや日次データを取るなどサンプリング間隔を狭めると，見かけ上のデータ数は増えるが，これは$C_{(r)}$の推定精度を高めるだけで，推定法そのものの信頼性向上は期待できない．経済データの場合，どう工夫してもせいぜい100～200年，それさえ定常性など厄介な問題が付きまとう．高々数十年，キチンサイクル10数期分程度で，そのストレンジネスをきちんと推定するなど，やはり不可能というべきかも知れない．ちなみに，筆者らが脳波の次元推定に使

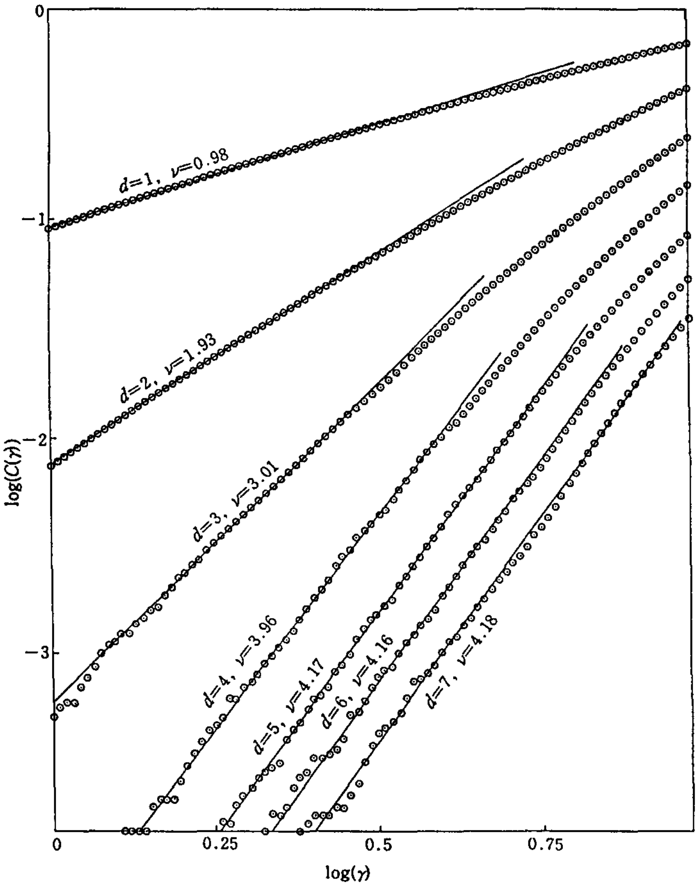

図4　米国GNP成長率のG－Pプロット[12]

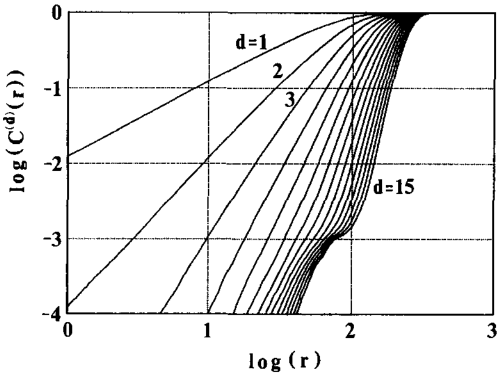

図5 サンプリング周波数の0.1以上が遮断されたホワイトノイズのG－Pプロット．フィルターは非再帰型を使用

用したデータ数は最大2万点であり，それ以上はコンピュータの能力と使用料金が枷となった．

帯域制限など，データが受けている歪みも深刻といわなければならない．この点について，ARモデルなどを適用して，残差系列で次元推定を行なう方法が広く取られている[9，10]．先ほどのホワイトノイズ例でいうなら，フィルターの効果をARで推定して影響を取り除く，いわば逆フィルタリングをほどこす方法といえる．もしデータが線形フィルターによる歪みを含む場合は有効な方法といえるが，そもそもカオスを生み出すようなシステムを想定するとき，ARによる形式的な補正がどこまで意味を持ち得るのか，不安は拭えまい．データには，この他にも季節調整という名の非線形フィルターやトレンド除去による特性のあいまいな低域遮断フィルターなど，さまざまな加工が含まれている．金利などの瞬時データは別にしても，累積系列は月や年単位での加算というフィルター，対前年同月比や同期比などでも同じフィルターが入っている．実際，G／Pプロットを描いても，直線領域がほとんど見あたらないケースも少なくなく，定規を当てるなり最小2乗法をほどこすにせよ，常に恣意性をまぬがれない．おまけに，たいていのデータは帯域そのものがせいぜい2桁しかない．どのような工夫をほどこしたとしても，その信頼性には常に疑問符が付きまとうことを念頭に置いておく必要があろう．Brockらが提案したBDS統計量［9］など，次元そのものの推定はあきらめたという雰囲気さえ伝わってくる．

6．経済分野におけるカオス研究の今後

前節で示したように，相関次元にもとづいたカオスの議論はなお問題が多い．しかも，positiveにせよnegativeにせよ，何がわかったのかがいま1つわかりにくい．次元4.2などといわれても，具体的な力学系を想定することはできず，掻痒感を拭えないわけで，これこそ次元にもとづくカオスの議論が十分に浸透しない最大の理由ともいえよう．しかしながら，経済システムや社会システムが常に非線形な要素をはらむ複合系であることも事実であって，このような世界にカオスが絡む可能性はきわめて高いといわなければならない．

ともかく，相関次元やLyapunov指数による議論が決着するとは思えないが，カオスへの糸口を与えたことは確かである．今後，モデリングの面では，従来のカオス系の移植にとどまることなく，もっとミクロな視点から構築し直していく必要があろう．たとえば，本誌で安達・合原が示したニューラルネットのカオス［26］やセルオートマトンのカオス［27］などは，具体的な社会のネットワークを単純化したものとも解釈できるし，ゲーム理論などと直接に結びつけることもできそうである．また，［26］で指摘されているように，予測という観点からもカオスの意義は無視できない．都市形成などはdiffusion limited aggregationと呼ばれる結晶成長モデル［16］ときわめてアナロジカルであり，このように考えていけば，カオスに結びつく具体的テーマに不足はなさそうである．

一方，実証面では，スペクトル分析の見直しと多元的な分析が必要と思われる．近年の経済時系列分析においてスペクトル分析はほとんど閑却されているが，データにどのようなモードが含まれているのか，まずこの点の把握から出発すべきであって，ただちに次元計算に入るのは尚早というべきであろう．さらに，ここでいう多元的分析には2つの意味を込めている．まず，経済データの多くは互いに密接に関わり合っていて，ある量だけがカオス性を示すことはありえない．したがって，多くの量について検討を行ない，その結果が互いにコンシステントであるかどうかをチェックしなければならない．もう1つは，この互いの関わり合いの中にも非線形特有の性質が検出されなければならないという点である．たとえば金利と投資の関係や日本とアメリカの関係などを例に挙げれば，これらは時間的なズレをもって関連している．そして，その相対的な関係が不変であれば，積極的に非線形を持ち込む根拠は失われる．おそらく，互いの位相関係を詳細に検討して，歪みの蓄積と解放というカオス特有の現象を探ることが最良の方法と考えられ，そのための

ツールの開発が急がれねばなるまい.

参考文献

[1] Gabisch, G. and Lorenz, H. -W., "Business Cycle Theory", Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[2] Grandmont, J. M. (ed.), "Nonlinear Economic Dynamics", Academic Press, Boston, 1988.

[3] Barnett, W. A., Berndt, E. R. and White, H. (eds.), "Dynamic Econometric Modelling", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[4] Lorenz, H. -W., "Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion", Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] Goodwin, R. M., "Chaotic Economic Dynamics", Clarendon Press, Oxford, 1990.

[6] Rosser, J. B. Jr., "From Catastrophe to Chaos : A General Theory of Economic Discontinuities", Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht, 1991.

[7] Benhabib, J. (ed.), "Cycles and Chaos in Economic Equilibrium", Princeton Univ. Press, Princeton, 1992.

[8] Barnett, W. A., Geweke, J. and Shell, K. (eds.), "Economic Complexity : Chaos, Sunspots, Bubbles, and Nonlinearity", Cambidge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[9] Brock, W. A., Hsieh, D. A. and LeBaron, B., "Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability : Statistical Theory and Economic Evidence", MIT Press, Cambridge/London, 1991.

[10] Peters, E. E., "Chaos and Order in the Capital Markets", John Wiley & Sons, New York, 1991.

[11] 田中辰雄, 景気循環の新しい解釈－景気循環はカオスと見なせるか, 景気とサイクル, 12, 132-143, 1991.

[12] 原田康平, 経済時系列データに対する2つのアプローチ－確率論的手法と決定論的手法, 久留米大学産業経済研究, 29, 533-559, 1989.

[13] 山口昌哉,「カオスとフラクラル」, 講談社, 1986.

[14] Abraham, R. H. and Shaw, C. D. (東保光彦訳),「ダイナミクス－力学系　ふるまいの幾何学」, 現代数学社, 1989.

[15] Thompson, J. M. T. and Stewart, H. B. (武者利光監訳, 橋口住久訳),「非線形力学とカオス」, オーム社, 1988.

[16] 高安秀樹 (編著),「フラクタル科学」, 朝倉書店, 1987.

[17] Cvitanovic, D., "Universality in Chaos" (2nd ed.), Adam Hilger, Bristol/New York, 1989.

[18] Day, R. H., "Irregular Growth Cycles", American Economic Review, 72, 406-414, 1982.

[19] 桜井邦明, 嶋中雄二編,「太陽が変わる　景気が動く」第9章　周期的外力が生みだす景気循環 (笹倉和幸), 同友館, 1989.

[20] Hayashi, H. and Ishizuka, S., "Chaos on the Neuron System" (in Musha, T. and Sawada, Y. (eds.), "Physics of the Living State"), Ohmsha, Tokyo, 1994.

[21] Grassberger, P. and Procaccia, I., "Measuring the Strangeness of Strange Attractors", Physica, 9 D, 189-208, 1983.

[22] 西藤他, 脳波リズムの相関次元, 電子情報通信学会技術研究報告, NLP88-54, 1988.

[23] 西藤聖二, 平川一美, 原田康平, 脳波の相関次元, 電子情報通信学会論文誌, J75A, 1045-1053, 1992.

[24] Mandelbrot, B. B. (広中平祐監訳),「フラクタル幾何学」, 日経サイエンス社, 1985.

[25] 武者利光,「ゆらぎの世界」, 講談社, 1980.

[26] 安達雅春, 合原一幸, ニューラルネットワークと予測, オペレーションズリサーチ, 37 [7], 336-341, 1992.

[27] 相沢洋二, セル・オートマトンの周辺, 数理科学, 23 [9], 64-65, 1985.