確率的ファジィ意志決定について

岩本 誠一, 藤田 敏治

1. はじめに

『ファジィ環境下の意志決定』は R. Bellman and L. Zadeh, "Decision-making in a fuzzy environment", Management Science 17(1970), [3],141-164 ではじめて導入され, その後の議論に大きな影響を与えている([2], [4], [6], [7], [8]). Bellman and Zadeh のアプローチはファジィ環境下とはいえ, 基本的には動的計画法を用いてある最小型評価基準を最大化する意志決定過程を構成することであると考えられる. この最小型評価基準は所定の制約を満たしながらゴール(目標)に到達する迄の直積(履歴)空間におけるメンバーシップ関数である. 特に, 確定的なシステムでは最小型評価そのものを最大化している. また, 確率的な推移システムでは最小型評価基準の期待値を最大化していると考えられる.

動的計画本来の立場からすれば, 確定的システムにしろ確率的システムにしろ, 動的計画法を用いた逐次最適化の解はなんらかの方法(例えば, 列挙法)による同時最適化の解と一致するべきであると考えられる. この点, 確定的なシステムにおける動的計画法の彼らの援用では確かに二つの方法による最適解は一致している.

しかし, 確率的なシステムにおける動的計画法による彼らの最適解は列挙法による最適解とは一致していない. 従って, 確率的システムに対しては Bellman and Zadeh による動的計画法の適用は(少なくとも数学的に)理論的整合性に欠けると考えられる.

本論文では, 確率的推移システムに対して Bellman and Zadeh とは異なる動的計画法を導入して,「逐次最適化＝同時最適化」を保証する最適解を与える. その基本的な考えは不変埋没原理(Principle of Invariant Imbedding)である. 具体的には, 最小型基準の期待値最大化問題を新しいパラメータ λ を含む問題群に埋め込んで, そこで再帰式を導く. さらに, 評価関数として最小型評価基準の関数を考え, やはり不変埋没原理の考え方を用いて再帰式を導く. これによりさらに多様な確率的多段決定過程問題を扱うことが可能である. 最後に効率的な再帰式の解法についても述べる.

以下では特に断わらない限り Bellman and Zadeh の記号を用いることにする. ただし一部, 彼らの表現では意味を正確に表していないと判断し, 表現を変更したところがある. なお $a \wedge b := \min(a, b)$ とする.

2. 確率的多段決定過程

本節では, Bellman and Zadeh [3], § 4 (ファジィ環境下の確定的意志決定), § 5 (ファジィ環境下の確率的意志決定) の記号・用語を用いる. まず § 5 の確率的意志決定過程で扱われている問題を述べる.

終端時刻 N は固定され, 初期状態 x_0 が与えられているとする. システムの状態推移はマルコフ型条件付き確率 $p(x_{t+1}|x_t, u_t)$ で記述されるとする. このとき, 問題はファジィ制約 $C^0, \cdots, C^{N-1}$ を満たしながら, 時刻 N においてファジィゴール G^N に到達する確率を最大にすることである. ファジィ制約 $C^0, \cdots, C^{N-1}$ のメンバーシップ関数がそれぞれ $\mu_0, \cdots, \mu_{N-1}$ で表され, ファジィゴール G^N のメンバーシップ関数が μ_{G^N} で表されるとき, 問題は次のように定式化される.

$$\mathrm{Max}\ E[\mu_0(u_0) \wedge \mu_1(u_1) \wedge \cdots$$

いわもと せいいち 九州大学経済学部
〒812 福岡市東区箱崎 6-19-1
ふじた としはる 九州大学数理学研究科
日本学術振興会 特別研究員
〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1

$$\wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N)]$$

$$\text{subject to} \qquad (1)$$

$$(\mathrm{i})_\mathrm{n} \quad x_{n+1} \sim p(\cdot \mid x_n, u_n) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

$$(\mathrm{ii})_\mathrm{n} \quad u_n \in U \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

ただし, E はマルコフ型条件付き確率 $p(x_{n+1} \mid x_n, u_n)$, 政策 $\pi = \{\pi_0, \pi_1, ..., \pi_{N-1}\}$, および初期状態 x_0 で定まる直積（履歴）空間 $U \times X \times U \times X \times \cdots \times U \times X$ 上の期待値（積分）作用素である.

さて, 彼らはこの問題に対して, 次のような確率的再帰式を導いている.

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) = \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} [\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge E\mu_{G^{N-\nu+1}}(\cdot \mid x_{N-\nu}, u_{N-\nu})] \qquad (2)$$

$$E\mu_{G^{N-\nu+1}}(\cdot \mid x_{N-\nu}, u_{N-\nu}) = \sum_{x_{N-\nu+1}} \{p(x_{N-\nu+1} \mid x_{N-\nu}, u_{N-\nu}) \times \mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})\} \qquad (3)$$

実は彼等の論文中において, 式(2)の “$\wedge$” は “,”(コンマ) であるがこれは単純にミスプリントと思われる. 事実, [3, pp. B154-B155] の例は式 (2),(3) によって計算されている ([4, pp.153], [6, pp.172], [7, pp.235], [8, pp.147] 参照).

この再帰式 (2),(3) は, [3], § 4 で確定的な場合に対して導かれた確定的再帰式:

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) = \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} (\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})) \qquad (4)$$

$$x_{N-\nu+1} = f(x_{N-\nu}, u_{N-\nu}), \quad \nu = 1, \cdots, N, \qquad (5)$$

を単に確率的に置き換えたものである. しかし本当にこれでよいのだろうか. ここでは改めて問題 (1) を考えてみる. さて, 任意に与えられた $x_{N-\nu}$ に対して部分問題:

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) = \mathrm{Max} \ E[\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N) \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m}, (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad N-\nu \leq m \leq N-1] \qquad (6)$$

を考えよう. このとき, 従来の（特に加法型評価の期待値最適化という意味での）動的計画法の立場からすれば, 値 $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$ と関数 $\{\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1})\}$ の間の関係式を導きたいのである. しかし, この再帰関係式を導くことは幾分無理がある [5]. それは評価関数がいわゆる加法型ではなく最小型であり, 最小型の期待値は期待値の最小型に等しくないからである（この点, 加法型の期待値は期待値の加法型である）. このように考えてみると, 従来の方法と異なった別のアプローチが必要になってくる. ここでは, 不変埋没原理を用いて, この問題を新しいパラメータを含む問題群に埋め込む. さて, 任意に与えられた状態 $x_{N-\nu}$ と区間 [0, 1] 上の実数 λ に対して部分最適化問題:

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}; \lambda) = \mathrm{Max} \ E[\lambda \wedge \mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \cdots \wedge \mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{G^N}(x_N) \mid (\mathrm{i})_\mathrm{m}, (\mathrm{ii})_\mathrm{m} \quad N-\nu \leq m \leq N-1] \qquad (7)$$

$$1 \leq \nu \leq N$$

$$\mu_{G^N}(x_N; \lambda) = \lambda \wedge \mu_{G^N}(x_N) \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \qquad (8)$$

を考える. このとき次の再帰式が成立する:

定理 1

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}; \lambda) = \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} \sum_{x_{N-\nu+1}} \{\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1}; \lambda \wedge \mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})) \times p(x_{N-\nu+1} \mid x_{N-\nu}, u_{N-\nu})\} \qquad (9)$$

$$x_{N-\nu} \in X, \ 0 \leq \lambda \leq 1, \ \nu = 1, 2, \cdots, N$$

$$\mu_{G^N}(x_N; \lambda) = \lambda \wedge \mu_{G^N}(x_N)$$

$$x_N \in X, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \qquad (10)$$

さて, 式 (9) の最大値に到達する $u_{N-\nu}$ の（任意の）値を $\tilde{\pi}_{N-\nu}(x_{N-\nu}; \lambda)$ で表す. 列 $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}_0, \tilde{\pi}_1, ..., \tilde{\pi}_{N-1}\}$ をパラメータ化された問題 (7),(8) の **最適政策** という. 以下では, 1変数関数 $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$ と2変数関数 $\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}; \lambda)$ を区別することが重要である. 一般に, 両者は一致しない:

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) \neq \lambda \wedge \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$$

([5] を参照). しかし, λ の十分大きい値 λ に対しては

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) = \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda)$$

が成り立つ. たとえば, $\lambda = 1$ でよい. それはメンバーシップが常に $0 \leq \mu_A(x) \leq 1$ だからである.

それでは最後に, 我々の確率的再帰式 (9), (10) を確定的な場合 ([3, §4]) に当てはめてみよう. この確定的システムは確率的システムの一つの特別な場合で, $p(x_{t+1}|x_t, u_t) = \delta_{f(x_t,u_t)}(x_{t+1})$ とおいた場合にあたる. ここに, $\delta_a(\cdot)$ は質点 a に確率 1 が集中しているデラックの測度である. このとき, 対応する (確率的) 再帰式 (9),(10) は

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda)$$

$$= \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} \mu_{G^{N-\nu+1}}(f(x_{N-\nu}, u_{N-\nu}); \lambda \wedge \mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}))$$

$$\nu = 1, 2, \cdots, N \tag{11}$$

$$\mu_{G^N}(x_N;\lambda) = \lambda \wedge \mu_{G^N}(x_N) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{12}$$

に帰着する.

また, 期待値作用素がなくなった結果

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) = \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu}) \wedge \lambda$$

が成立することに注意しておこう. よって式 (11) より, 等式

$$\lambda \wedge \mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu})$$

$$= \lambda \wedge \operatorname*{Max}_{u_{N-\nu}} [\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu}) \wedge \mu_{G^{N-\nu+1}}(f(x_{N-\nu}, u_{N-\nu}))]$$

が区間 $[0, 1]$ のすべての λ について成り立つことになり, 結局 Bellman and Zadeh の確定的再帰式 (4),(5) そのものが得られる.

このように確定的システムを確率的システムの特別なケースとみなすことによって, 確率的再帰式から確定的再帰式を演繹的に導くことができる. しかし, 逆に確定的再帰式の単なる類推 (Bellman and Zadeh の意味でのアナロジー) で確率的システムの結果を導くのは危険であり, 理論的であるとは言い難い.

3. Bellman and Zadeh の例

本節では, 逐次最適化 (すなわち, 我々の不変埋没原理に基づく動的計画法による最適化) が本来の求める同時最適化に一致することを確かめるために, Bellman and Zadeh の例 [3, pp. B154] を用いる.

まず, パラメータ λ を含んだ我々の再帰式 (9),(10) に実際に Bellman and Zadeh の数値例をあてはめて, これを解いてみよう. 具体的な解き方については後述するが, 計算の結果最大期待値は次の値になった:

$$\mu_{G^0}(\sigma_1) = 0.795,\ \mu_{G^0}(\sigma_2) = 0.595,\ \mu_{G^0}(\sigma_3) = 0.583$$

なお, 最適行動についてここでは省略する. このように不変埋没原理を用いた動的計画法による最大期待値と最適行動は, また直接 (すべての場合を調べ尽くす全数) 列挙法によっても求めることができる. 当然ながらこの両者は一致しなければならず, 我々の逐次最適解については, 一致を確認している.

それでは次に, Bellman and Zadeh の再帰式に対する結果をあげる. 彼等は再帰式を解いて, 最適解:

$$\mu_{G^0}(\sigma_1) = 0.8,\ \ \mu_{G^0}(\sigma_2) = 0.62,\ \ \mu_{G^0}(\sigma_3) = 0.62$$

を得ている [3, pp.B154-B155]([7, pp.235-240] も参照). しかし, この計算結果そのものも正確でなく $\mu_{G^0}(x_0)$ の厳密な値は次のようになる:

$$\mu_{G^0}(\sigma_1) = 0.798,\ \mu_{G^0}(\sigma_2) = 0.622,\ \mu_{G^0}(\sigma_3) = 0.622$$

しかしどちらにしろ, Bellman and Zadeh の (いわゆる加法型利得系に対する従来の意味での) 動的計画法による逐次最適解は列挙法による同時最適解に一致していない.

この種の問題に対しては, 動的計画法本来の考え方であるところの, 所与の問題をこれを含むより広い問題群に埋め込んで, そこで再帰式を樹立する必要がある. この点 Bellman and Zadeh の動的計画法では, 十分に広い問題群に埋め込んだことにはならず, 一方我々の動的計画法では, (利得系にパラメータλを導入した) 1 次元広い問題群に埋め込めば, 再帰式も導けて, しかもそれを完全に解くことができることがわかった. この問題では 1 次元広い問題群に埋め込んでうまくいったが, しかし一般には, 所与の問題をどれ位い大きな問題群に埋め込めば再帰式が導けて解けるかわからない. どのような問題群に埋め込むかがまさしく動的計画法そのものの問題と言えよう.

4. 多様な評価関数への応用

ここでは評価関数としてこれまで考えてきた最小型評価基準に変えて, その最小型評価基準の関数を考える. すなわち次のような問題を考える.

$$\mathrm{Max}E[f(\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge \cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N))] \quad (13)$$

subject to (i)$_n$ $x_{n+1}\sim p(\cdot\mid x_n,u_n)$ $0\le n\le N-1$

(ii)$_n$ $u_n\in U$ $0\le n\le N-1$.

f は $[0,1]$ 上の関数である. 問題 (13) は, Bellman and Zadeh [3] で扱われている確率的推移システムをその特別な場合として含むものである.

この問題も, 不変埋没原理の考え方を用いて再帰式を導かなければならない. 実際, § 2 同様パラメータλを導入した 1 次元広い問題群に埋め込めば, 再帰式を導け, 完全に解くことができる. 定理としてその再帰式を示す.

定理 2

$$\mu_{G^{N-\nu}}(x_{N-\nu};\lambda) = \underset{u_{N-\nu}}{\mathrm{Max}}\sum_{x_{N-\nu+1}}\mu_{G^{N-\nu+1}}(x_{N-\nu+1};\lambda\wedge\mu_{N-\nu}(u_{N-\nu})) \times p(x_{N-\nu+1}|x_{N-\nu},u_{N-\nu}) \quad (14)$$

$$x_{N-\nu}\in X,\ \ 0\le\lambda\le 1 \quad \nu=1,2,\cdots,N$$

$$\mu_{G^N}(x_N;\lambda)=f(\lambda\wedge\mu_{G^N}(x_N)) \quad (15)$$

$$x_N\in X,\ \ 0\le\lambda\le 1.$$

このとき問題 (13) の求める最適値は $\mu_{G^0}(x_0)=\mu_{G^0}(x_0;1)$ として得られる.

問題 (13) における $f(x)$ としては連続関数はもちろん, 様々な関数が考えられるが, 特に特性関数 $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$ のときは, 次のような確率最大化問題になる.

$$\mathrm{Max}\ P[a\le\mu_0(u_0)\wedge\mu_1(u_1)\wedge \cdots\wedge\mu_{N-1}(u_{N-1})\wedge\mu_{G^N}(x_N)\le b]$$

subject to (i)$_n$, (ii)$_n$ $0\le n\le N-1$

これらの問題はいずれも 定理 2 の再帰式に基づいて解かれる.

5. 再帰式の解法

本節では問題 (13) に対し, 実際に再帰式を計算する上での効果的な方法を与える.

定義 1 区間の族 $\{I_i|\ i=1,2,\cdots,m\}$ が条件 $I_i\subset[0,1]$ $(i=1,2,\cdots,m)$, $\bigcup_{i=1}^m I_i=[0,1]$, $I_i\cap I_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, $\sup(I_i)=\inf(I_{i+1})$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$ を満たすとする. このとき, 記号 $[\![\cdots]\!](\cdot)$ を次のように定義する. (但し, χ は特性関数, f_i, f_{ji} は全て $[0,1]$ 上の実数値関数)

$$[\![f_1,f_2,\cdots,f_m]\!](x) := f_1(x)\chi_{I_1}(x)+f_2(x)\chi_{I_2}(x)+\cdots+f_m(x)\chi_{I_m}(x) \quad (16)$$

$$\left[\!\!\left[\begin{matrix} f_{11} & \cdots & f_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{n1} & \cdots & f_{nm}\end{matrix}\right]\!\!\right](x) := \begin{pmatrix}[\![f_{11},\cdots,f_{1m}]\!](x)\\ \vdots\\ [\![f_{n1},\cdots,f_{nm}]\!](x)\end{pmatrix} \quad (17)$$

定理 3 区間族 $\{I_i\mid i=1,2,\cdots,m\}$ は定義 1 の条件を満たすものとし, $[\![\cdots]\!](\cdot)$ は定義 1 に従って定義されたものとする. また f_i, f_{ji} は全て $[0,1]$ 上の実数値関数とし, p_{ij} は全て実数とする. このとき,

(i)
$$\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{l1} & \cdots & p_{lm}\end{pmatrix}\left[\!\!\left[\begin{matrix} f_{11} & \cdots & f_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_{m1} & \cdots & f_{mn}\end{matrix}\right]\!\!\right](x) = \left[\!\!\left[\begin{matrix} \sum_{j=1}^m p_{1j}f_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m p_{1j}f_{jn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{j=1}^m p_{lj}f_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^m p_{lj}f_{jn}\end{matrix}\right]\!\!\right](x)$$

(ii) ${}^\forall\alpha\in[0,1]$ に対し, 定義 1 の条件を満たす区間族 $\{I'_i|i=1,2,\cdots,n'\}$ と $n'_0\in\{1,2,\cdots,n'\}$ が存在して

$$[\![f_1,f_2,\cdots,f_n]\!](x\wedge\alpha) = [\![f_1,f_2,\cdots,f_{n_0-1},f_{n_0},\underbrace{c,\cdots,c}_{n'-n'_0}]\!]'(x)$$

(ただし, c は定数で, $[\![\cdots]\!]'$ は $\{I'_i\}$ に対応)

(iii)
$$\max_j\begin{pmatrix} a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \max_j\ a_{1j}\\ \vdots\\ \max_j\ a_{mj}\end{pmatrix}$$ と定義すると,

$$\max_j\left[\!\!\left[\begin{matrix} f^j_{11} & \cdots & f^j_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f^j_{m1} & \cdots & f^j_{mn}\end{matrix}\right]\!\!\right](x) = \left[\!\!\left[\begin{matrix} \max_j f^j_{11} & \cdots & \max_j f^j_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \max_j f^j_{m1} & \cdots & \max_j f^j_{mn}\end{matrix}\right]\!\!\right](x)$$

記号 $[\![\cdots]\!](\cdot)$ を用い，定理 2 の再帰式を書き直してみよう．簡単のため，$X=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_m\}$，$U=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ とおく．まず $\mu_{G^N}(x_N;\lambda)$ を計算すれば，区間 $[0,1]$ の適当な分割 $\{I_j^N|j=1,2,\cdots,n_N\}$ をとり，

$$\mu_{G^N}(\sigma_i;\lambda)=[\![f_{i1}^N,\cdots,f_{in_N}^N]\!](\lambda),\quad i=1,2,\cdots,m$$

と表すことができる．次に，$\mu_{G^{N-\nu+1}}(\sigma_i;\lambda)$ が適当な区間族 $\{I_j|j=1,2,\cdots,n\}$ に対し，

$$\mu_{G^{N-\nu+1}}(\sigma_i;\lambda)=[\![f_{i1},\cdots,f_{in}]\!](\lambda),\quad i=1,2,\cdots,m$$

と表せているとする．このとき，$\mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_i;\lambda)$ は，次のように表されることがわかる．

$$\begin{pmatrix}\mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_1;\lambda)\\ \vdots\\ \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_m;\lambda)\end{pmatrix}$$

$$=\max_{j=1,2,\cdots,l} P\left[\!\!\left[\begin{matrix}f_{11}&\cdots&f_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ f_{m1}&\cdots&f_{mn}\end{matrix}\right]\!\!\right](\lambda\wedge\mu_{N-\nu}(\alpha_j)) \quad (18)$$

ただし，$P=\begin{pmatrix}p(\sigma_1|\sigma_1,\alpha_j)&\cdots&p(\sigma_m|\sigma_1,\alpha_j)\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ p(\sigma_1|\sigma_m,\alpha_j)&\cdots&p(\sigma_m|\sigma_m,\alpha_j)\end{pmatrix}$

更に定理 3 を用いて，必要ならば区間族を $\{I'_j\mid j=1,2,\cdots,n'\}$ と取り直すことにより，次のように表せる．

$$\begin{pmatrix}\mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_1;\lambda)\\ \vdots\\ \mu_{G^{N-\nu}}(\sigma_m;\lambda)\end{pmatrix}=\left[\!\!\left[\begin{matrix}f'_{11}&\cdots&f'_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ f'_{m1}&\cdots&f'_{mn}\end{matrix}\right]\!\!\right](\lambda)$$

あとはこれを繰り返し，$\begin{pmatrix}\mu_{G^0}(\sigma_1;\lambda)\\ \vdots\\ \mu_{G^0}(\sigma_m;\lambda)\end{pmatrix}$ を求める．

この方法の実行にあたって問題となるのは，max を求めるところである．$|U|$（入力の数）が増えるに従い，計算量が増えることに変わりはないが，実際は，$f_{ij}(x)$ が $f_{ij}(x)=a_{ij}f(x)+b_{ij}$ （$a_{ij},b_{ij}\in\mathbf{R}$）の形をしており，結局次のような問題を考えることになる．

$$\max_{j=1,2,\cdots,l} a_jf(x)+b_j \quad (19)$$

これを解く際，次の命題は有効である．

命題 1 区間 I を区間 $[0,1]$ の部分区間とし，$a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}$ とする．このとき，(i) $a_1-a_2=0$ かつ $b_1\geq b_2$，(ii) $a_1-a_2>0$ かつ $\min_{x\in I}f(x)\geq\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}$，(iii) $a_1-a_2<0$ かつ $\max_{x\in I}f(x)\leq\frac{b_2-b_1}{a_1-a_2}$ のいずれか一つが成り立つことが，任意の $x\in I$ に対し $a_1f(x)+b_1\geq a_2f(x)+b_2$ であるための必要十分条件である．

この命題により，$\max\{f(x)\mid x\in I\}$，$\min\{f(x)\mid x\in I\}$ が容易に求まれば（例えば，f が I 上単調関数なら）$a_jf(x)+b_j$ の大小関係も比較的簡単に求められる．更に，max, min の代わりに sup, inf を用いても十分条件となることがわかるので実際は，sup, inf でよい．また大小関係がつかない時は場合分けが必要となるが，(19) の形のみを扱えばよいのでその分岐点を探すには，$f(x)=c$（$c\in\mathbf{R}$）を解くアルゴリズムさえ与えられていれば十分である．

参考文献

[1] Bellman, R.E.: *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] Baldwin, J.F. and Pilsworth, B.W.: Dynamic programming for fuzzy systems with fuzzy environment, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.85 (1982), 1-23.

[3] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science*, Vol.17 (1970), B141-B164.

[4] Esogbue, A.O. and Bellman, R.E.: Fuzzy dynamic programming and its extensions, *TIMS/Studies in the Management Sciences*, Vol.20 (1984), 147-167.

[5] Iwamoto, S.: Associative dynamic programs, under consideration.

[6] Kacprzyk, J.: Decision-making in a fuzzy environment with fuzzy termination time, *Fuzzy Sets and Systems*, Vol.1 (1978), 169-179.

[7] 水本 雅晴: ファジィ理論とその応用, サイエンス社, 1988.

[8] 小田中 敏男: 確率制御過程, 森北出版, 1976.