総合報告

DEAの解釈と展望

―その1―

William W. Cooper, 刀根 薫, 髙森 寛, 末吉 俊幸

1. はじめに

DEA (Data Envelopment Analysis) は，一群の意思決定体 (Decision Making Unit-DMU) の業績を評価するために生まれた「データ指向の新しいアプローチ」である．ここでいう意思決定体とは，いくつかの種類の入力（投入）をいくつかの出力（産出）に変換することに携わる生産体のことである．DMU の定義はごく一般的なもので厳密な規定を要するものではない．むしろ柔軟な考えに基づいて行うべきである．これまでの応用例には，(i) 半導体生産工場における毎期ごとの生産活動や，(ii) 様々な市場に対する宣伝や販売活動等が含まれる．入出力とも複数の種類を扱うことが可能で，これらは一般に異なる尺度や単位で測られる．

次に，DEA の諸概念を実際に応用するために種々のモデルが開発されているのがその中で最も基本的なモデルを説明する．はじめに各 DMU のデータが次のよう与えられたと仮定しよう：

x_{ij} = DMU_j が利用する i 番目の入力の量
y_{rj} = DMU_j が生成する r 番目の出力の量
ただし，$i=1,2,\ldots,m;\ r=1,2,\ldots,s;\ j=1,2,\ldots,n$ とする．また，便宜上すべての投入と産出は正の値であると仮定する[1]．

DEA の基本的なモデルとして次のような双対の線形計画モデルを使う．

主問題：

$$\min \quad h_o = \theta_o - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \qquad (1)$$

制約：

$$0 = \theta_o x_{io} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j - s_i^-,$$
$$i = 1,\ldots,m$$
$$y_{ro} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \quad - s_r^+,$$
$$r = 1,\ldots,s$$
$$0 \le \lambda_j, s_r^+, s_i^-, \quad j = 1,\ldots,n$$

[1] この条件は緩めることができる． A. Charnes, W.W. Cooper and R.M. Thrall (1991) を参照．

ウイリアム．W. クーパー
University of Texas at Austin, College and Graduate School of Business, CBA 5.202, AUSTIN, TEXAS 78712-1175, U.S.A.
とね　かおる
埼玉大学大学院政策科学研究科
〒338 浦和市下大久保 252
たかもり　ひろし
青山学院大学国際政治経済学部
〒150 渋谷区渋谷 4-4-25
すえよし　としゆき
The Ohio State University, College of Bisiness, 1775 College Road, Columbus, OH 43210, U.S.A.

Charnes, Cooper and Rhodes (1978) の最初の論文以来の六百に及ぶ参考文献が整理され，University of Massachusetts, Amherst, Massachusets, USA の L. Seiford から入手可能である．オペレーションズ・リサーチ誌 1987 年 12 月～1988 年 3 月に連載講座：刀根薫,「企業体の効率性分析手法」がある．さらに，同誌 1993 年 1 月号に刀根,「論文・研究レポート：DEA のモデルをめぐって」がある．関連論文として，末吉俊幸 (1992, 1993) を参照されたい．本稿は，Cooper が青山学院大学の客員教授として来日した折，Cooper，刀根，髙森の間でなされた議論をもとに，Cooper が第一稿を書き，その後，末吉が米国から参加して，日米間の調整にあたり，日本語版として仕上がった．このような機会を備えた青山学院大学国際政治経済学部に感謝する．本稿の参考文献はこの連載の最終回にまとめて記す．

双対問題：

$$\max \quad y_o = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{ro} \qquad (2)$$

制約：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} &= 1 \\ \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} &\leq 0, \quad j = 1, \ldots, n \\ -\mu_r, -\nu_i &\leq -\varepsilon, \\ r &= 1, \ldots, s \\ i &= 1, \ldots, m \end{aligned}$$

通常，線形計画法 (LP) は将来計画を作成するために用いられるが，ここでは既になされた選択に対する事後評価の目的に用いる．各DMUの業績を評価するにあたっては，すべてのDMUの投入産出データに(1)式が適用され，そこでの評価は，以下の定義の基づいてなされる．

> 効率性： **Pareto-Koopmans** の定義の拡張
> 各 DMU に関して，それが完全な (100%の) 効率性をもつとは次の状態を意味する．その入力又は出力のどれかを改善しようとすれば，他の入力又は出力のどれかを犠牲にすることなしに達成できない．

この定義の利点は，どの入力や出力に対しても，その相対的重要性の尺度を前もって付与しなくてすむことである．

経営や社会科学での大抵の応用では，理論的に効率性の水準があらかじめ分かっていることはあまりない．したがって，上の定義は次のもので置き換えられる．

> 相対的効率性： ある DMU に関して「その入力又は出力のどれかの改善を，他の入力か出力のどれかを犠牲にしないで達成できる」ことを，他の DMU のパフォーマンスが許さないとき，またそのときに限り，その DMU は完全に (100%) 効率的であると評価される．

(1) 式はある特定の DMU_o について，上記の効率性概念の下で，その DMU の効率を求めるものであり，θ_o の最適値が $\theta_o = \theta_o^* \leq 1$ であることは (1) 式の制約式の総和の添字 j の中に DMU_o が含まれることから明かである．上の定義を (1) に適用すれば，

> **DEA** 効率性: DMU_o の業績は，以下の両方が成り立つとき，また，そのときに限り，完全に (100%) 効率的である：
>
> (i) $\theta_o^* = 1$
> (ii) すべてのスラック $= 0$

$\theta_o^* < 1$ のときは，他のいくつかのDMUの非負結合からなる活動によって，DMU_o と同一（又はそれ以上）の出力が，DMU_o の入力を θ_o^* 倍に縮小しても可能であることを示す．同様に，非負のスラックは DMU_o の活動業績において，どの入力の削減や出力の追加が，どの程度可能でるあるかを示している．

このスカラー θ_o^* は，M.J. Farrell (1957) によるもので，「Farrellの効率性測度」とも呼ばれる[2]．ここで，$\theta_o^* = 1$ の値であっても，(1) 式のスラック s_r^{-*} または s_r^{+*} のどれかが正であれば，上の「相対的効率性」の定義の条件を満たさないことに注意したい．なぜなら，(1) 式から明かなように，そのような非負のスラックは，他の変数に影響することなしに，減少させることができるからである．

これらをどう取り扱うかについては，主（最小化）問題 (1) の目的関数において，スラック変数 s_i^- と s_r^+ にそれぞれ $\varepsilon > 0$ が掛けられていることに注目する必要がある．これは，非アルキメディアン微小値で—通常の線形計画法の人工変数にペナルティとして掛ける「巨大な罰金M」の逆数に相当し—これらスラックが何らかの値をとることによって θ_o の増加が引き起こされた場合，それによる目的関数の増加度はスラック値による目的関数の減少度をはるかに上回ってしまう．この性質によって，θ_o の最小化が，まず最優先されることになる．しかし，DEA のコンピュータ・プログラムは，一般に，最適化を 2 段階にわけて，θ_o を最小化した後に，スラック値の最大化を行うので，ε に特定の値を与えて解く必要はない[3]．具体的には，第 1 段階で θ_o を最小化した上で，第 2 段階で，$\theta_o = \theta_o^*$ の制約条件下で，スラック変数の和を最大化する．

図 1 では，4 個の DMU，$P_1, P_2, \ldots, P_4$ を幾何学的に描写しており，座標の値は，各 DMU がある 1 種類の産出物 (y) を単位量，つまり，$y = 1$ だけ生産するために投入した 2 種類の入力の量を表している．

---

[2] Farrell の明快な議論は，M.J. Farrell and M. Fieldhouse (1962) の補遺に見られる．

[3] $\varepsilon > 0$ は非アルキメディアンの微小値なので実数と考えてはならない．このことに関しては，V. Arnold 他 (1992) を参照．具体的な計算法については刀根 (1993b) を参照．

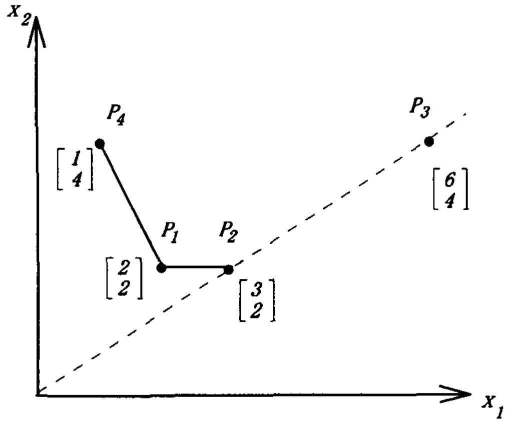

図 1: DEA 効率性

P_3 は，P_2 との比較において，明らかに非効率である．なぜなら，これは同じ産出量を達成するのに両方の入力をより多く投入しているからである．したがって，その P_2 に対する Farrell の相対的効率性は：

$$\theta = \frac{d(0,P_2)}{d(0,P_3)} = \frac{\sqrt{3^2+2^2}}{\sqrt{6^2+4^2}} = \frac{1}{2}$$

によって決めることができる．ここで，$d(0,P)$ はユークリッドの距離測度，すなわち l_2-距離測度である．

この θ 値は，スラックを省略して，(1) 式の主問題を次のような不等式に書き直して得ることができる：

$$\min \quad \theta_o$$

制約：

$$\begin{aligned} 6\theta_o &\geq 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 1\lambda_4 \\ 4\theta_o &\geq 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 \\ 1 &\leq 1\lambda_1 + 1\lambda_2 + 1\lambda_3 + 1\lambda_4 \\ 0 &\leq \lambda_1, \ldots, \lambda_4 \end{aligned}$$

ここで，第 3 番目の制約は，すべての DMU が $y=1$ 単位の産出を行うことを表している．最適解は $\theta_o^* = \frac{1}{2}, \lambda_2^* = 1$ であり，これは P_3 の評価が P_2 をもとに行われることを示している．さらに，ここで，スラックの可能性を配慮する必要がある．それは，$\varepsilon > 0$ に特定の値を与えずに，(1) 式から次の最大化問題を作って解けばよい：

$$\max \quad s_1^- + s_2^- + s^+$$

制約：

$$\begin{aligned} 0 &= -6\theta_o + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 6\lambda_3 + 1\lambda_4 + s_1^- \\ 0 &= -4\theta_o + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 + 4\lambda_4 + s_2^- \\ -1 &= -1\lambda_1 - 1\lambda_2 - 1\lambda_3 - 1\lambda_4 + s^+ \\ \frac{1}{2} &= \theta_o \\ 0 &\leq \lambda_1, \ldots, \lambda_4, s_1^-, s_2^-, s^+ \end{aligned}$$

この第 2 段階を解くと，(1) 式の最適解として，$\theta_o^* = \frac{1}{2}, \lambda_2^* = 1, s_1^{-*} = 1$ となり，他の変数はすべてゼロとなる[4]．このスラック $s_1^{-*} = 1$ は P_2 の第 1 投入要素の余り量を表し，上に定義した相対的効率性を満たすには，この量も考慮に入れなくてはならない．事実，(1) の主問題で P_2 を評価すると，これも，$\theta_o^* = 1, s_1^{-*} = 1$ となって非効率的である．

図 1から分かるように，P_1 は P_2 を支配しており，よって，P_3 をも支配している．P_1 と P_4 だけが支配されていないので，Bowlin 他 (1993) に見られるように，DEA を支配関係に限定すれば，これらの DMU のみが効率的ということになる．しかし，連続性の仮定を加えれば，P_1 と P_4 を結ぶ線分すべてが，効率性評価に利用できる．この線分は，効率的フロンティアと呼ばれる．この「効率的フロンティア」という言葉が適切である理由として，この線分上の 1 点から，どれかの投入を改善するために，他点へ移動しようとするならば，同じ単位量 ($y=1$) を生産するために，どれかの投入を悪化させることなくしては移動できないということにある．

連続性の仮定の下では，効率的フロンティア上にない点は，フロンティア上の点を参照して評価できる．ある DMU の評価にあたっは，λ^* に対応するいくつかの DMU の非負結合とスラック値によってフロンティア上のある点を特定化し，それとの比較において評価することができる．

フロンティア上に移行するためには，「CCR 投影式」と呼ばれる次の式を使うことができる：

$$\begin{aligned} \hat{x}_{io} &= \theta_o x_{io} - s_i^- \leq x_{io}, \quad i = 1, \ldots, m \quad (3) \\ \hat{y}_{ro} &= y_{ro} + s_r^+ \geq y_{ro}, \quad r = 1, \ldots, s \end{aligned}$$

ここで，$(\hat{x}_{io}, \hat{y}_{ro})$ は，DMU_o の観察値 (x_{io}, y_{ro}) から得られた効率フロンティア上の点を表す．実際，$(\hat{x}_{io}, \hat{y}_{ro})$ は，(x_{io}, y_{ro})，$i = 1, \ldots, m$，$r = 1, \ldots, s$ を評価するのに使われたフロンティア上の点である．

「Data Envelopement Analysis」という名前は (1) 式の（最小化）主問題からきている．すなわち，DMU_o のデータとして与えられた入出力ベクトルに対して，

[4] この 2 段階の手続きで，主問題（1）の最適解が得られることの証明は，Arnold 等 (1993) に見られる．

投入部分を下から，また産出部分を上から包絡する合成ベクトルの中で，できる限りこれに近く接するものを得ることである．

一方，双対問題 (2) の方は，「乗数」型または「生産関数」型と呼ばれる．前者は μ と ν の値を双対乗数と呼ぶことからきている．ここでは目的関数は，「仮想産出」とよばれるウエイトづけされた出力の総和（総出力の理論値） y_o を最大化することである．その際，対応する仮想投入，すなわちウエイトづけされた入力の総和（総入力の理論値）が1に等しいとする（$\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} = 1$）．他の制約として，どの DMU_j についても，その仮想産出は仮想投入を上回ることができない，すなわち，$\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \le \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij}$，$j = 1,\ldots,n$ が課せられる．最後に，条件，$\mu_r, \nu_i \ge \varepsilon > 0$ はこの「生産関数」型では，どの投入も産出も「なんらかの」正の価値が与えられることを意味している[5]．

2. 投入指向型と産出指向型のモデル

投入指向型の (1) 式のモデルに対して，次の一組の双対の線形計画モデルを産出指向型と呼ぶ：

主問題：

$$\max \quad \phi_o + \varepsilon\left(\sum_{r=1}^{s} s_i^{+'} + \sum_{i=1}^{m} s_i^{-'}\right) \tag{4}$$

制約：

$$\begin{aligned}
0 &= \phi_o y_{ro} - \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda'_j - s_r^{+'}, \\
&\qquad r = 1,\ldots,s \\
x_{io} &= \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda'_j \quad - s_i^{-'}, \\
&\qquad i = 1,\ldots,m \\
0 &\le \lambda'_j, s_r^{+'}, s_i^{-'}, \qquad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}$$

双対問題：

$$\min \sum_{i=1}^{m} \nu'_i x_{io} \tag{5}$$

制約：

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \mu'_i y_{ro} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{m} \nu'_i x_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu'_i y_{rj} &\ge 0, \quad j = 1,\ldots,n \\
\nu'_i, \mu'_r &\ge \varepsilon, \quad i = 1,\ldots,m \\
&\qquad r = 1,\ldots,s
\end{aligned}$$

(1) 式と (4) 式の関係は，次の通りである．主問題 (1) の最適解が与えられ場合，(4) の最適解は次式により計算される：

$$\begin{aligned}
\phi_o^* &= \frac{1}{\theta_o^*}, \qquad \lambda'*_j = \frac{\lambda_j^*}{\theta_o^*} \\
s_r^{+'*} &= \frac{s_r^{+*}}{\theta_o^*}, \qquad s_i^{-'*} = \frac{s_i^{-*}}{\theta_o^*}
\end{aligned} \tag{6}$$

要するに，(1) 式の各項を，単に θ_o^* で割れば (4) 式の解が得られる．したがって，ある DMU_o が (1) 式で効率的であると評価されるのは，それが (4) 式で効率的であると評価されるとき，またそのときに限られるのである．

効率性化はこの場合，次の形の「CCR 投影式」によりなされる：

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{io} &= x_{io} - s_i^{-'*} \le x_{io}, \quad i = 1,\ldots,m \\
\hat{y}_{ro} &= \phi_o^* y_{ro} + s_r^{+'*} \ge y_{ro}, \quad r = 1,\ldots,s
\end{aligned} \tag{7}$$

以上をまとめると，ある DMU_o が，どちらかのモデルで非効率と評価されれば，もう一つのモデルでも非効率と評価されることになるが，(3) 式および (7) 式で表されるように，効率化を達成する投入，産出量はモデルによって異なることに注意する．

3. 比率形式の CCR （Charnes-Cooper-Rhodes）モデル

(1) 式の定式化は，比率形式の CCR モデルの線形計画版と見ることができる．以下この点について説明する．まず，双対問題 (2) のすべての変数に $t > 0$ を掛けて，以下のように定義した新しい変数を導入する：

$$\begin{aligned}
u_r &= t\,\mu_r \ge t\,\varepsilon \\
v_i &= t\,\nu_i \ge t\,\varepsilon \\
t &= \sum_{i=1}^{m} t\,\nu_i\,x_{io}
\end{aligned} \tag{8}$$

双対問題 (2) の目的関数に $t > 0$ を掛けた後で，t で割るという操作をすれば次のようになる：

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}$$

制約：

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} &\le 1, \quad j = 1,\ldots,n \\
\frac{u_r}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} &\ge \varepsilon, \quad r = 1,\ldots,s \\
\frac{v_i}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}} &\ge \varepsilon, \quad i = 1,\ldots,m
\end{aligned} \tag{9}$$

[5]すでに述べたように，$\varepsilon > 0$ の値として，具体的な数値を与える必要はない．

こうして，DEA評価に関する比率形式が得られ，$\varepsilon > 0$であるから解は閉じており，しかも下限が存在する．よって，この比率空間における解集合は，閉集合であり有界である（空ではない）．したがってコンパクトである．(9)式の目的関数における分数の分子は正であるように条件づけられているので，この分数は常に定義されており，また連続である．コンパクト集合上で定義された連続関数が，そこで最大値と最小値を達成することはワイヤストラスの極値定理が保証するところである．よって，(9)式においてはsupではなく，maxの演算子を使って差し支えない．

問題(9)は非線形かつ非凸関数であるのに対し，問題(1)は線形計画であるので，計算は通常(1)式で行われる．Charnes and Cooper (1962)による分数計画法の理論によれば，(1)と(9)の最適値は等しい．(1)式の解を使って，(9)の解を得ることが可能であり，また，その逆も可能である．したがって，(1)を(9)の比率形式モデルの線形計画版と呼ぶことができる．

定式化 (9) にはいくつか利点がある．例えば，Charnes and Cooper (1962)は，(9)の最適の比率値はどの入力，出力の測定に使われる単位に関しても不変であることを示したが，この性質は(1)にもそのままいえる．(9)は解釈の面でも威力を発揮し，種々の領域，分野での効率性の定義を統合化する基礎となる．たとえば，Charnes, Cooper and Rhodes (1978)は科学や工学で使われる単一入力に対する単一出力の効率性の通常の定義は(9)から導き得ることを示した．よって，これらの定義は，最適性の基準を暗に包含しているといえる．分数計画を通じての(1)から(9)に到る関係は，これら最適性条件を経済学における効率性の定義に結びつけるものである．

(9)式の意味が明らかになるにつれて，DEAはウェイトを決める新しい原理をもたらす．とくに，ウェイトは先験的に付与されるのではなくて，データから直接に決定される．DMU_j，$j = 1, 2, \ldots, n$のそれぞれについて,「最適の」ウエイトが決定される．これら最適のウェイトが与えられたとき，それぞれのDMU_oの効率性のテストは，どれか他のDMU_j がDMU_oよりも高い比率の値を達成しているかを問題とし，しかも，その際に後者の最適のウェイトが使われる[6]．このことから，(9)の最大化された目的関数値が1になったときに，また，そのときに限り，DMU_oは効率的であると考えてよい．

DEAは，また，実証データから，推定を行うための新しい原理をもたらしている．その原理は，n回の最適化を行って，n点のそれぞれの点に対してできるだけ近づこうという発想から出てくるものであり，これは，例えば，統計学におけるように，これらの「すべて」の点に，できるだけ近づくために1回の最適化を行うというアプローチに代わるものである．その際に，関数形を明確に規定する必要がない．等張性(isotonicity)の数学的性質さえあれば，それら関数形は，非線形であってもよいし，それぞれのDMUについて異なるような多重のものでもよい．(Charnes等(1985)を参照されたい.)

4. 歴史的背景

歴史的背景を，短くたどって，以後の議論に深さと興味を加えたい．DEAの研究は，1970年代の初期に，Edwards Rhodesが， カーネギー・メロン大学のSchool of Urban & Public Affairsで従事した博士論文に端を発している．W. W. Cooperの指導のもとで行われたこの研究の対象は，連邦政府のサポートで米国の公立学校で行われた小数派不遇児童(disadvantaged students, 主に，黒人およびヒスパニック系）の教育プログラムを評価するというものであった．最終的には，「Program Follow Through」- 全国的な調査において，当該の学校のデータの集合に実験計画法の原理を適用するという米国教育庁の膨大な試み－に研究の焦点が絞られた．Rhodesは，ボストンのコンサルティング会社，Abts Associates社が，教育庁との契約の下で，その調査のために処理していたデータを利用できる立場にあった．データベースは十分大きかったので，その調査での入力，出力変数は多数であったが，自由度に関する問題などはなかった．それにもかかわらず，そこで試みられたあらゆる統計的，計量的アプローチからは，非現実的で間違った結果しか得られなかった．

この問題に対処しようとして，Rhodesは，M. J.

[6]しかしながら，次の理由で，これらウェイトの解釈にあたっては，注意が必要である：(a)これらウェイトの値は，通常は，効率的DMUの異なる集合を参照して決められている．(b)これらが，(1)を使って決められるときは，非ゼロのスラックのことも考慮しなくてはならない．Charnes, Cooper, Divine, Ruefli, Thomas (1989)の議論を参照されたい．そこでは，ドル等価の概念をつかって，完全な順序づけ原理を得た上で，Texas Public Utility Commissionが，Texasでの電力組合の効率性監査を行うガイドとしている．

Farrell の 1957 年の Journal of the Royal Statistical Society の論文 “The Measurement of Productive Efficiency” に，Cooper の注意を喚起した．この論文で Farrell は，生産性測定のために通常使われていた指数 (index number) によるアプローチに欠点があることを指摘し，それを是正するために「アクティビティ分析の概念」を用いた．

Cooper は，それ以前から，Charnes と，Tjalling Koopmans の「アクティビティ分析の概念」に計算可能な形を与えるべく研究していた[7]．それで，Farrell の命題をそのままの形で受け入れ，Cooper と Rhodes は本稿の第 1 部に示したような定式化を行った．これらの諸定義は，彼らのその後の研究に種々のガイドを与えることとなった．

Pareto の名前は，次の理由で，上の二つの定義のうちの前者に属していると考えてよい．スイス人であり，またイタリア人でもあった経済学者 Pareto は，著書「Manual of Poitical Economy (1906)」において，現代の厚生経済学の基礎を与えた．その中で，彼は，あるひとつの社会政策は，それがなんらかの人々に便益をもたらし，その際に，他の人々に不利益をもたらさないときに，正当化されると指摘した．このやり方で，ある人達が獲得する便益の価値と，他の人々が受ける損失とを比較するという困難な問題を回避することができるし，影響を受ける個人たちの効用関数を確定する必要がない，すなわち，各個人の利得と損失の相対的重要性にウェイトづけする必要がない．

この性質は，T. C. Koopmans が編集した本「Activity Analysis of Production and Allocation (Wiley, 1951)」に受け継がれ，また応用された．この文脈では，この性質が与えられたのは「最終財」であり，どの最終財についても，それが改善されるに際しては，それが他の最終財を悪化させる結果とならないなら，その改善が許されるという制約が与えれれた．これら最終財（産出財）は，取り決められた量だけ満たされるが，その際に，投入要素の量は，それらの価格に応じ，また各産出に対し外生的に固定された量に応じて，最適に決定される．そこで，Koopmans は特に「効率性価格」なるものに注目したが，これは，最終財への定められた需要を満たすものにあたり，諸資源（投入要素）の最適配分に関わる価格である．この「アクティビティ分析」のアプローチにおけるメカニズムについての簡明な解説としては，Charnes and Cooper (1961) の 299 ページを参照されたい．

Pareto と Koopmans はともに経済全体の分析に関心があった．そのような文脈では，最終需要を満たす能力との関連で，投入要素の価格と量が決まるのはもっともな話である．Farrell は，Pareto-Koopmans の性質を，投入にも産出にも拡張的に適用し，また価格を使うことや，それに関連する交換のメカニズムを使うことを明白にすることを避けた．さらに重要なことは，かれは，各 DMU の投入に対する産出の行動を評価するにあたり，他の DMU の業績を使った．これにより，相対的な効率性を実証的に決める道へと進むことが可能になった．

われわれが「Farrell の効率性尺度」と呼ぶ尺度は「技術的効率性」を意味する．すなわち，投入も産出も悪化させずに排除できる無駄の量を意味する．この技術的効率性を Farrell は経済学でいう「配分的」または「規模の」効率性と区別した．これらの効率性につては，次に議論するが，これらの概念は DEA を実際に適用する際に遭遇した諸問題を解決するために必要になった種々の拡張や展開でもある．ここで留意したいことは「Farrell の尺度」に表現されているような形での，効率性評価へのアプローチでは，すべての DMU は，諸投入要素に同様にアクセスできるということが仮定されているということである．これは，すべての DMU が，同じ投入要素の量を利用するということではない．しかし Farrell の効率性評価は各 DMU が利用した投入要素の量とそれらが生成した産出に対して均等なアクセスが可能であるという仮定の下でなされたのである．この「均等性の仮定」は，データの利用可能性に関する限り，妥当なものであるといえる．これは，「配分的」もしくは「範囲の効率性」，「規模の効率性」のようなパフォーマンスの側面を扱うにあたって必要となるデータやその他の要請に比べれば，それほど厳しい要求ではない．さらに，この仮定は，以下に述べるように，緩めることができる．例えば，DMU の管理者のコントロールの及ばない条件を扱うような場合に–各 DMU によって異なるような「外生的」に固定された資源を扱うような場合–「制御不能変数や制約」を導入することができる．また，類似の特性を持つ DMU グループとの関連で，評価を実

[7]A. Charnes and W. W. Cooper (1961) の第 I X 章を参照されたい．この章で報告されている成果は，多目的計画法についての，現在，開発されている計算的アプローチの多くを啓発するきっかけとなっている．

施するようにするために,「カテゴリー変数」を導入することもできるし，以下に述べるように，その他の拡張や条件緩和も可能である．

実際のところ，われわれが「拡張された Pareto-Koopmans の効率性」および「相対的効率性」と呼んできたものは，Farrell ではなくて，Cooper と Rhodes によって定式化された．しかしながら，これらの定義は，Farrell のモデルと整合するものでありまた，彼がそれを使ったやり方にも整合している．いずれにせよ，これらの定義は Cooper と Rhodes が，次に述べる発展にあたりガイドとしたものである．

Rhodes がその研究で扱った「Program Follow Through」では，心理テストで測定された「不遇児童 (disadvantaged child) における自己尊厳の増加」のようなものが産出として記録され，また「母親がその子供と読書に過ごす時間」のような項目が投入として記録されている．Farrellが価格の情報の必要性を除去したことは，Program Follow Through の実験で各学校について記録されている上のような投入，産出を扱うにはうってつけのことであった．

Farrell のそれまでの実証研究は，単一の産出財のケースに限られており，彼が示唆した多重産出財への拡張によっては，Program Follow Through におけるような大きなデータセットを取り扱うには十分ではない．計算的に実施可能な形を得るために，Cooper と Rhodes は (1), (2) にモデル化されている双対の線形計画を開発した．このとき Farrell の尺度では，非ゼロのスラックの解釈を見落としていることに気づいた．この非ゼロスラックの中に，非効率性が検出されるのである．技術的効率性に限定する場合でさえ，これら非ゼロのスラックの存在には注意しなければならない．

われわれは，ここで，これらスラックを扱うにあたっての諸問題を強調したい．なぜなら，DEA の（また関連する）文献のかなりの部分は，今日においてさえ，非ゼロスラックの扱いにおいて難点があるからである．上に述べたように，扱われる問題のかなりの部分は，代替的な最適解の存在の可能性に関わっており，それらについて，Farrellの尺度が同じ値でも，ある最適解ではスラックがゼロであり，他のものではそうではない．Farrell はこの問題を扱おうとした試みと思われる「無限遠点 (points at infinity)」を導入したが，しかし，この概念を具体的に取扱う方法は与えなかった．この問題を扱う助けとなるものは，Sidney Afriat (1972), Ronald Shephard (1970)，あるいは，Gerhard Debreu (1951) 等の初期の研究からも得られない．この問題を扱うために，Cooper は「非アルキメディアン要素」($\varepsilon > 0$) に関連して築かれた数学的概念を導入したが，これはすでに述べたように，**Farrell** の尺度を変更せずに，スラックが最大化されることを保証するやり方で，この問題を処理することを可能にしたのである．

Cooper と Rhodes が考案した双対の問題は，容易に上の考えを多種の産出財，多種の投入要素の場合に拡張し，しかも各 DMU の各投入，各産出での非効率を突き止めることに成功した．それにも関わらず，総轄的な尺度という点で，もう少し別の方向が望まれた．この時点で，Cooper は Charnes に呼びかけ，このきわめて有望なテーマの研究に加わるよう勧誘した．分数計画法の分野を確立した Charnes と Cooper の初期の研究を活用して，Charnes は，Cooper と Rhodes が考案した双対の線形計画の問題を，それと等価の (9) の比率形式に表現した．そしてすでに述べたように，この形式は DEA において達成されたものを，工学や経済学など他の分野での効率分析へのアプローチと統合する基礎となったのである．