

予測手法

(2)：生態学モデル

上田 徹

2. 生態学モデル

需要予測によく使われるモデルとして立ち上がり、高潮期、飽和時点を表現できるロジスティック方程式がある。これは人口は時間とともに増加し、やがて一定の極限值に到達するという現象をモデル化したものである。生態学では植物、動物と環境の間の相互関係が扱われるが、ロジスティック・モデルはその一番、単純な1種生態系を取り扱うモデルになっている。ここでは、まずロジスティックモデルをとりあげ、それから複数種のモデルを論じる。

2.1 ロジスティック・モデル

時点 t での個体数（たとえば購入客数） x_t が

$$x_t = \frac{m}{1 + e^{-\phi(t)}} \quad (2.1)$$

ただし m ：定数（総需要）、

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p \quad (2.2)$$

で表わされるモデルをロジスティックモデルと呼び、狭義には

$$\phi(t) = a_0 + a_1 t \quad (2.3)$$

の場合を指すことが多い。ここでは、式(2.1)、(2.3)あるいはそれらから導かれる

$$\frac{dx_t}{dt} / x_t = -a_1 \left(1 - \frac{x_t}{m}\right) \quad (2.4)$$

で表わされるモデルについて論じる。式(2.4)は個体の増加率が x_t に関して直線で表わされていることを示している。時点 t と x_t との関係は図 2.1 のようになる。

式 (2.4) より

$$\frac{d^2 x_t}{dt^2} = a_1^2 x_t \left(1 - \frac{x_t}{m}\right) \left(1 - \frac{2x_t}{m}\right) \quad (2.5)$$

であるので、 $\{x_t = m/2\}$ において x_t は変曲点を持ち、その点を中心に点対象となっている。

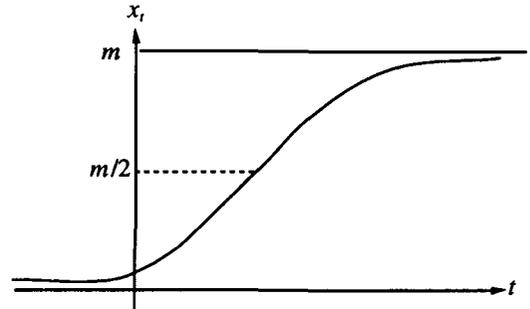


図 2.1 ロジスティック曲線イメージ

また $\{t \rightarrow \infty\}$ で $\{x_t = m \ (a_1 < 0)\}$ である。これらの特徴から m が別途推定できない場合にデータから推定すると直線的に x_t が増加しているときには m を誤って推定しやすい。たとえば x_t が10ずつふえて

$$x_2 = 20, x_3 = 30, x_4 = 40,$$

となっているときに $\{x_1 = 11, x_5 = 49\}$ であれば変曲点は $\{x_3 = 30\}$ の点と考えると $\{m = 2x_3 = 60\}$ と判断するだろうが、この m は過少見積もりであることが多いであろう。このようにロジスティック・モデルでは曲線の立ち上がり期、最高潮期、収れん期すべてのデータがそろっていないと曲線の全貌を正確に把握できない。しかしロジスティック曲線の推定は収れん期になされるわけではないことを考えると別途 m を何らかの手段で推定することが必須である。たとえば類似サービス、代替サービスの傾向や需要母体を考慮して推定したり、サービスの属性ごとの最終需要への寄与を既存サービスから推定することなどが考えられる。

実際に用いられるデータは連続的に測定されたものではなく離散的時点（たとえば年度別）での観測データであることが多いであろう。そこで離散的時点でのパラメータ推定法を示す。ここで

$$\frac{dx_t}{dt} / x_t = \frac{x_{t+1} - x_t}{x_t} \triangleq y_t$$

うえだ とおる NTT通信網総合研究所

〒180 武蔵野市緑町3-9-11

$$-a_1 = a, \quad \frac{a_1}{m} = b \quad (2.6)$$

とすると、 m が未知の場合

$$y_t = a + b \cdot x_t + E_t, \quad E_t: \text{時点 } t \text{ での誤差項} \quad (2.7)$$

(ただし、節2.2以降は誤差項は明示していない。)

として最小自乗法により a, b を推定できる。ここでその推定値は

$$\hat{b} = S_{xy} / S_{xx}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} \quad (2.8)$$

ただし

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

$$S_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.9)$$

である。式(2.6)を使って a_1, m が \hat{a}, \hat{b} から推定され、

$$a_0 = \log(m/x_t - 1) + \hat{a} \cdot t \quad (2.10)$$

から a_0 が推定される。式(2.10)における t, x_t の値としては t, x_t それぞれの平均値が使われる。

m が与えられているときには

$$z_t = (1 - x_t / m) \quad (2.11)$$

とおくと

$$a_1 = \frac{\sum_t y_t z_t}{\sum_t z_t^2} \quad a = -a_1 \quad (2.12)$$

および式(2.10)から a_0 が求まり、それらを式(2.3)、(2.1)に代入すればよい。

2.2 Bassモデル[1]

F. M. Bassは、「時点 t までの未購入者が耐久消費財を期間 $(t, t + \Delta t)$ に購入する確率 $P(t) \Delta t$ は他人にまだわされない購入意欲(innovation効果)と既購入者数 x_t がふえてくると乗り遅れまいとする気持ち(imitation効果)との和で表現される」と考え、以下のようなモデルを提案した。[1]

m を総需要とする。時点 t までに購入している人の割合を

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = x_t / m$$

とし、 t まで未購入の条件付確率密度関数を

$$p(t) = f(t) / \{1 - F(t)\} = a + \frac{b}{m} x_t \quad (2.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = m, \quad m \cdot f(t) = dx_t / dt \quad (2.14)$$

とモデル化して、 a は innovation効果、 (bx_t/m) は imitation効果を表わすものとしている。式(2.13)は式(2.14)を使うと

$$\frac{dx_t / dt}{m - x_t} = a + \frac{b}{m} x_t \quad (2.15)$$

あるいは

$$dx_t / dt = (m - x_t)(p_1 + q_1 x_t); p_1 = a, q_1 = \frac{b}{m} \quad (2.16)$$

と表現できる。これを解くと

$$\begin{aligned} x_t &= m[1 - c_0 \exp\{-(a+b)t\}] / [\frac{b}{a} c_0 \exp\{-(a+b)t\} + 1] \\ &= \frac{m[1 - c_0 \exp\{-(p_1 + mq_1)t\}]}{1 + \left(\frac{mq_1}{p_1}\right) c_0 \exp\{-(p_1 + mq_1)t\}} \end{aligned} \quad (2.17)$$

ただし、

x_0 : 時点0での既購入者数

$$c_0 = (m - x_0) / \{m(1 + q_1 / p_1)\}$$

である ([1], P.218参照)。式(2.16)で $\{p_1 = 0\}$ のとき

$$dx_t / dt = x_t(mq_1 - q_1 x_t) \quad (2.18)$$

となり、式(2.4)と比較するとBassモデルはロジスティックモデルを包含していると言える。

$f(t)$ または dx_t / dt は

$$f^* = -\frac{1}{a+b} \log \frac{a}{b}, \quad b > a$$

で最大となり、そのときの x_{t^*} は

$$x_{t^*} = m(b - a) / 2b$$

である。

式(2.16)の左辺を差分

$$x_{t+1} - x_t \triangleq y_t$$

とし、右辺を展開して

$$\begin{aligned} m \cdot p_1 + (m \cdot q_1 - p_1)x_t - q_1 x_t^2 \\ \triangleq a_0 + a_1 \cdot x_t + a_2 \cdot x_t^2 \end{aligned}$$

とすると x_t, x_t^2 を説明変数、 y_t を被説明変数として

$$\sum_t [y_t - \{a_0 + a_1 \cdot x_t + a_2 \cdot x_t^2\}]^2$$

を最小にするように a_0, a_1, a_2 、すなわち m, p_1, q_1 が推定される。

本モデルの拡張版として

(I) m が時点とともに変化するモデル[2]あるいは価格の関数となるモデル[3],[4]

(II) 式(2.15)の右辺が、時点 t や広告費などの商品

に対する情報に関連する量の関数となるモデル [4],[5],[6],[7]

(Ⅲ) 式(2.16)の右辺に価格 $P(t)$ のペナルティを課して

$$dx_i / dt = (m - x_i) (p_i + q_i x_i) \exp\{-k \cdot P(t)\} \quad (2.19)$$

とするモデル[8],[9]

などが考えられている。しかし、Bass自身はモデルを複雑化することには批判的[10]である。また、他企業の価格を考慮した2社競合モデル

$$dx_i / dt = (m - x_i - x_j) \{a_i (1 - k \cdot P_i) + \gamma (P_j - P_i)\} \\ i=1, 2; j \neq i$$

ただし、

P_i : 企業*i*の価格

k : 価格弾性的パラメータ (価格弾性値そのものではない)

a_i : 企業*i*の他企業に対する絶対的優位性

γ : 消費者が感じる2製品間の代替性

が提案されている[11],[12]。

Bassモデルのパラメータについては、微分を単位期間当たりの増分としてとらえ、式(2.15)の右辺を展開して定数項および x_i , x_i^2 の係数を最小自乗法により推定する方法が[1]では提案された。これについては係数推定の不安定さがあり、最尤法なども提案されているが、Bassモデルを適用したい局面はデータ数にあまり期待できない時点であり、ロジスティックモデルと同じく最大需要 m を別途推定し、 $\{(x_{i+1} - x_i) / (m - x_i)\}$ の x_i に対する回帰から p , q を推定したり、類似サービスのパラメータを参考にするなどが考えられる。

2.3 捕食者-被食者モデル

これまで1種生態系をとりあげてきた。本節からは複数種のモデルをとりあげる。そのようなモデルとしては1920年代にLotkaとVolterraが独立に提起したモデルで捕食者(たとえばサメ)と被食者(サメに対する小魚)の関係を表わすモデルが有名である。小魚(数= F)がふえるとそれをエサとするサメ(数= S)がふえる。

サメがどんどんふえると小魚は食べられ過ぎて減り出す。小魚がどんどん減っていくとサメはその数を維持できなくなり減りだす。サメがどんどん減っていくと小魚はあまり食われなくなり、ふえだす。これが繰り返される。これをモデル化し、小魚の増加率は

$$\frac{dF}{dt} = a - b \cdot F - c \cdot S \quad (2.20)$$

$$\frac{dS}{dt} = -k + \lambda F \quad (2.21)$$

とする。式(2.20)の右辺第1、第2項はサメがいなければロジスティック成長モデルになることを表現し、同第3項はサメの数が小魚増加の足を引っ張ることを表現している。式(2.21)の右辺第1項は小魚がいなければサメは減り続けるしかないことを表わし、同第2項は小魚の増加がサメの増加に寄与することを表わしている。ロジスティック成長モデルでは自種がふえるとエサが不足して減り出す効果($b > 0$)を見込んでいるが、そのような抑制効果(エサが足りない)ということを考える必要がない場合には $\{b = 0\}$ としてよい。

$\{b = 0\}$ のときに、 F と S とがそれぞれの企業の市場占有率の場合には、

$$F + S = 1 \quad (2.22)$$

$a = k = 0$ [∵ $S=0$ または $F=0$ では市場占有率は変化しない]

$$c = \lambda \quad [∵ \frac{d(F+S)}{dt} = (\lambda - c)FS = 0]$$

であり、これらを式(2.20)、(2.21)に代入すると

$$\frac{dF}{dt} = -\lambda (1 - F) \quad (2.23)$$

$$\frac{dS}{dt} = \lambda (1 - S) \quad (2.24)$$

となって、式(2.4)における $\{m=1\}$ の場合のロジスティック成長モデルとなる。このモデルはFisher and Pryが技術変遷モデル(F : 在来技術, S : 新技術)として提案したものである[13]。

これを2種から*n*種に拡張したモデルが提案された[14]。第*k*種の市場占有率を f_k とすると

$$\frac{df_k}{dt} = \sum_{i < k} C_{ik} f_i - \sum_{k < i} C_{ki} f_i \quad (2.25)$$

で表わされる。すなわち*k*よりも古い技術に対しては*k*はサメとして作用し、*k*よりも新しい技術に対しては*k*は小魚となることを意味する。このモデルは交換機が「手動→ステップ・バイ・ステップ→クロスバー電子」と変遷していく過程を表現するのに使われた。ここでは C_{ik} として

(I) 時点にかかわらず一定

(II) 時間に関して線形

のモデルを比較し、(II)が予測力の点で劣ることから(I)を採用している。ただし、予測期間は5年以内、係数推定は5年以上のデータのある交換機というように制限を設けている。また、古い技術ほど置換されやすいとの観点から*i < j < k*に対しては

$$C_{ik} \geq \alpha_{ijk} C_{jk} ; 9 \geq \alpha > 1$$

と条件づけた方が精度がよかったとしている[14]。

捕食者-被食者モデルは長期に見ると周期的変動を繰り返すが、このモデルの応用では技術変遷などのように徐々に在来技術が新技術に移っていく過程を予測するのに使われるであろう。

2.4 競争的モデル

2種が競争的關係にあるとき、他種の存在は増加を妨げるとの観点からロジスティック・モデルの拡張として、2種の個体数を*x, y*とすると

$$\frac{dy}{dt} = a - bx - cy \tag{2.26}$$

$$\frac{dx}{dt} = d - ey - fx \tag{2.27}$$

とするモデルが考えられる[15]。

またBassモデルの拡張として

$$\frac{dx}{dt} = p_1 + q_1x - r_1y \tag{2.28}$$

$$\frac{dy}{dt} = p_2 + q_2y - r_2x \tag{2.29}$$

が考えられる[16]。

たとえば

$$dx/dt = (100 - x - y)\{5(x + 46.25) - 15(y + 13.75)\}$$

$$dy/dt = (100 - x - y)\{7(y + 13.75) - 15(x + 46.25)\}$$

の場合には図2.2のように直線S1を境界とする2つの矢印付き曲線で表わされる成長パターンがある。

ただし

$$z \triangleq \frac{x + 46.25}{y + 13.75}$$

である。また、S2は最終需要を表わす直線である。

矢印付き曲線と*x*軸との交点の*x*座標*x*₀が正のときは*x*が独占している市場に*y*が参入してくる状況を表わしている。直線S1と*x*軸との交点の*x*座標は22.5なので、{0 < *x*₀ < 22.5}では直線S3との交点で*x*は最大となり、以降は*x*は減り、*y*のみ増

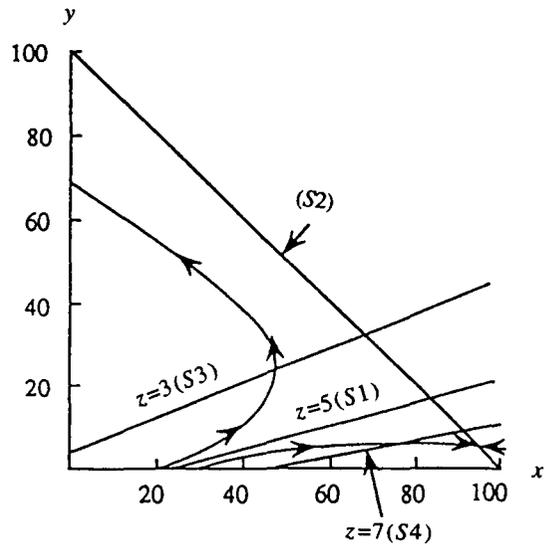


図 2.2 (x, y)の軌跡

え続けるパターン、すなわち参入が成功する場合である。{22.5 < *x*₀}では直線S4との交点で*y*は最大となり、以降は*y*は減り、*x*が増えるパターン、すなわち参入が失敗する場合である。これは、最終需要に対してすでに*x*が相当のレベル(この例では22.5%以上)に達しているような市場には参入しても無駄であることを示している。{22.5 < *x*₀}では*y*はより大きな*r*₁あるいは*q*₂をもって参入しなければならない。

式(2.28), (2.29)で表わされたモデルは*n*種に拡張することができ、

$$dx_i/dt = (m - \sum_j x_j) (a_i + \sum_j b_{ij} x_j) \tag{2.30}$$

と表現される。(この解法については文献[16]を参照されたい。)

特に*b*_{*ij*}が

$$b_{ii} = (Q + r_i) / m$$

$$b_{ij} = r_j / m \quad (j \neq i \text{ の場合でも } j \text{ には依存しない})$$

の場合、すなわち

$$dx_i/dt = (m - \sum_j x_j) (a_i + Qx_i / m + r_i \sum_j x_j / m)$$

のときには、[18]に*x*_{*i*}の解が陽に与えられている。それによればまず、

$$Y = \sum_j x_j$$

が、Bassモデルの解として与えられ、

$$Y/m = \frac{1 - C_1 \exp\{-(P+Q+R)t\}}{1 + \frac{Q+R}{P} C_1 \exp\{-(P+Q+R)t\}}$$

ただし、

$$P = \sum_i a_i, \quad R = \sum_i r_i$$

$$C_1 = \frac{m - Y_0}{m + \frac{Q+R}{P} Y_0}$$

Y_0 : 時点0でのYの値

である。次に

$$dx_i/dY = \frac{a_i + Q x_i/m + r_i Y/m}{P + Q Y/m + R Y/m}$$

となるので、これは解くことができ、

$$x_i(t) = \frac{m(r_i P - a_i R)}{QR} + \frac{r_i}{R} Y(t) - C_2 [Y(t) + \frac{mP}{Q+R}]^{\frac{R}{Q+R}}$$

が得られる。ただし、 C_2 は $x_i(0)$, $Y(0)$ より決められる定数となる。

電話、自動車電話、ポケットベルなどの市場へ新規業者が参入する場合には一挙に全国を対象にサービス展開をするのではなく、徐々にサービスエリアを拡大していくことが多い。このような場合にはエリア拡大のたびに最終需要 m は増加するであろうし、innovation効果も変化するであろうと考えられる。また各エリアへの進出時点は業者により異なるであろうと考えられる。これらのことを考えて業者 U の時点 t での契約者数 u_t が

$$du_t/dt = (m_{ut} - S_{ut})(a_u + \sum_h d_{uh} \xi_{ut}^{(h)} + b_{uu} u_t - \sum_{v \neq u} b_{uv} v_{ut})$$

で表現されるモデルも考えられる[17]。ここで

$$m_{ut} = m_0 + \sum_h m_h D_{ut}^{(h)}; \quad S_{ut} = \sum_v v_{ut}$$

$\xi_{ut}^{(k)}$: 業者 U の k 回目のエリア拡大時点 t_{uk} のみ1をとり、他の時点では0

v_{ut} : 業者 U がサービスしているエリアでの業者 V の契約者数

$D_{ut}^{(h)}$: h 回目のエリア拡大 t_h 時点以前(時点 t_h も含む)に業者 U がサービスしていれば t_h 以降1、さもなければ0である。

であり、 m_{ut} は業者 U が時点 t でサービスしている全エリア合計の最終需要を表わしている。

2.5 bandwagon効果に着目したモデル[19]

各個人はその人が持つ L 人のインフルエンサー(自己の決定に影響を及ぼす人、クラスメートなど)のうち K 人が新しいサービスを受けると自分もつられてそのサービスを受けるようになるものとし、時点 t で人 A が利用者でない確率 x_t は

(時点0で人 A が非利用者 --式(2.31)の x_0 --、

かつ時点 $(t-1)$ でインフルエンサーのうちの利

用者が K 人未満である --式(2.31)の $B(K, x_{t-1})$ --)

確率で与えられるものとする。子供達がファミコンなどを親にねだるとき、「みんなが持っているから僕にも買ってよ」と言っているときのクラスメート数が L 、実際に持っている人数が K に相当するであろう。

潜在需要(母集団)が十分大きく、時点 t での2人の状態がほぼ互いに独立で母集団内は一様と考えられるときには近似的に

$$x_t = x_0 \cdot B(K, x_{t-1}) \quad (2.31)$$

$$B(K, x) = \sum_{i=0}^{K-1} \binom{L}{i} (1-x)^i x^{L-i} \quad (2.32)$$

が成り立ち、 x_t は時点 t での非利用者の割合になる。ここで、 $\{y_0 = 1 - x_0\}$ は時点0での利用者[誰よりも早く利用する人(innovators)]の割合を示すが

$$y_0 < \bar{y} = 1 - 1/\max_{0 \leq x \leq 1} \{B(K, x)/x\} \quad (2.33)$$

のときには $\{t \rightarrow \infty\}$ で普及率 $(1-x_t)$ が100%とならない。これは、最初にある程度の客がつくようなサービスでないと十分、普及しないことを意味する。このモデルではbandwagon効果と呼ばれる急速にサービスが広まる過程が表現できる。このモデルはBassモデル以上に構造に柔軟性がなく、実際のサービスの普及過程に適用してみると K を時変にしたりすることが必要[20]であったりしてデータに合わせたモデルの変更が必要と思われるので、早目にサービス打切り判断が必要などなどの参考として役立つ程度と考えた方がよい。

2.6 感度解析の必要性

ここで紹介した方法は節2.5を除き、微分方程式モデルと言えるが、微分方程式モデルの欠点であるパラメタ感度がよ過ぎるという性質は図2.2からも読み取れる。たとえば、直線S1の上にあるか下にあるかで結果は全く異なる。また係数の大きさも環境

変化につれて時間とともに変化するであろうし、新しく考慮すべき要因もあるかもしれない。このような中で言えることは現在の状況を外挿した見通しとしてはこんなことが言えるといったことであり、これは実ほどの予測手法も大同小異であり、予測法に過度の期待を寄せられない理由である。このような点をふまえると特に微分方程式モデルを用いる場合には同時に感度解析も行なっておく必要がある。

節2.2で紹介した Bass モデルについては本誌の近刊 [21]でも紹介されている。若干、重複する記述もあるが、観点の相違および講座としてのまとまりの点から御容赦いただきたい。Bass モデルに関心を持たれた読者に [21]が参考になるであろうことは言うまでもない。

参考文献

(文献番号は毎回、別個に与えられている)

- [1] F.M.Bass : "A New Product Growth Model for Consumer Durables", *Management Science*, Vol. 15, No.5, pp.215-227, 1969.
- [2] V.Mahajan and R.A.Peterson : "Innovation Diffusion in a Dynamic Potential Adopter Population", *Management Science*, Vol. 24, No.15, pp.1589-1597, 1978.
- [3] G.Feichtinger : "Optimal Pricing in a Diffusion Model with Concave Price-Dependent Market Potential", *Operations Research Letters*, Vol.1, No.6, pp.236-240, 1982.
- [4] S.Kalish and G.L.Lilien : "A Markt Entry Timing Model for New Technologies", *Management Science*, Vol.32, No.2, pp.194-205, 1986.
- [5] E.Dockner and S.Jorgensen : "Optimal Advertising Policies for Diffusion Models of New Product Innovation in Monopolistic Situations", *Management Science*, Vol.34, No.1, pp.119-130, 1988.
- [6] D.Horsky and L.S.Simon, : "Advertising and the Diffusion of New Products. *Marketing Science*, Vol.2, No.1, pp.1-17, 1983.
- [7] H.Simon and K.-H.Sebastian : "Diffusion and Advertising : The German Telephone Campaign", *Management Science*, Vol.33, No.4, pp.451-466, 1987.
- [8] R.J.Dolan and A.P.Jeuland : "Experience Curves and Dynamic Demand Models : Implications for Optimal Pricing Strategies", *Journal of Marketing*, Vol.45, pp.52-62, 1981.
- [9] B.Robinson and C.Lakhani : "Dynamic Price Models for New-Product Planning", *Management Science*, Vol.21, No.10, pp.1113-1122, 1975.
- [10] F.M.Bass : "The Adoption of a Marketing Model : Comments and observations", *Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance* (edited by V.Mahajan and Y.Wind), Ballinger, Massachusetts, pp.27-33, 1986.
- [11] R.J.Dolan, A.P.Jeuland and E.Muller : "Models of New Product Diffusion : Extension to Competition against Existing and Potential Firms over time", *Innovation Diffusion Models of New Product Acceptance* (V. Mahajan and Y. Wind), Ballinger, Massachusetts, pp.117-149, 1986.
- [12] J.Eliashberg and A.P.Jeuland : "The Impact of Competitive Entry in a Developing Market upon Dynamic Pricing Strategies", *Marketing Science*, Vol.5, No.1, 20-36, 1986.
- [13] J.G.Fisher and R.H.Pry : "Simple Substitution Model of Technological Change", *Technological Forecasting and Social Change*, No.3, pp.75-88, 1971.
- [14] R.J.Armolavicius, P.Cologrosso and N.E.Ross : "Technology Replacement Models Based on Population Dynamics", *International Teletraffic Congress(ITC) 12*, pp.5.3A.2.1-5.3A.2.8, 1988.
- [15] M.S.Bartlett : "On Theoretical Models for Competitive and Predatory Biological Systems", *Biometrika*, 44, pp.27-42, 1957.
- [16] T.Ueda : "A Study of a Competitive Bass Model which Takes into Account Competition among Firms", *J.OR Society of Japan*, Vol.33, No.4, pp.319-334, 1990.
- [17] T.Ueda : "Demand Forecasting Models for Markets with Competition", *Teletraffic and Datatraffic in a Period of Change*, ITC-13, pp.261-265, 1991.
- [18] 中島 望 : 「競争市場における新製品普及モデルとその新製品導入時期決定問題への応用」, *大阪大学経済学*, Vol.40, No. 1・2, pp.402-410, 1990.
- [19] A.Gersho and D.Mitra : "A Simple Growth Model for the Diffusion of a New Communication Service, *IEEE Trans.*, Vol.SMC-5, No.2, pp.209-216, 1975.
- [20] 上田 徹 : 「新製品拡散モデルの通信サービスへの適用」, *OR学会秋季研究発表会*, 1988.
- [21] 山田 昌孝 : 「新製品普及モデル」, *オペレーションズ・リサーチ*, Vol.39, No.4, pp.189-195, 1994.