OR演習例解

紐と滑車と錘(3)

——数理計画の散歩道——

柳井　浩

6．紐の長さの配分による定式化その3 ー動的計画法

［例題6］　今度は，錘も滑車も個数を増やして，図6－1のような場合を考えよう．個数が増えても，問題の構造に変りはない．定式化も全く同様である．すなわち，紐の長さに関する制約条件

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = L \tag{1}$$

$$u_i \geqq a_i,\quad i=1,2,\cdots,N \tag{2}$$

の下で目的関数

$$\varphi(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\sqrt{u_i^2 - a_i^2} \tag{3}$$

を最大にする問題である．したがって，この問題に対しても，これまでと同様の方法で接近することもできるし，変数が増える他は，ほとんど同様の性質が導かれる．そこで，ここでは趣向を変えて，動的計画法によって扱うようにしよう．この問題のもつ別の側面が見えてくるだろう．

いま，天井の滑車P_{i-1}で紐を固定して，これから右側の錘m_i，m_{i+1}，…，m_Nが作る系を考えてみよう．これらの錘も，与えられた紐の長さに関する条件

$$\sum_{j=i}^{N} u_j = s_i \tag{4}$$

$$u_j \geqq a_j \quad j=i,\ i+1,\ \cdots,\ N \tag{5}$$

$$s_i：点P_{i-1}からP_N までの紐の長さ \tag{6}$$

の下で，1次のモーメント

$$\varphi_i(u_i, u_{i+1}, \cdots, u_N) = \frac{1}{2}\sum_{j=i}^{N} m_j\sqrt{u_j^2 - a_j^2} \tag{7}$$

を最大にしている．したがって，ここに得られる1次のモーメントの最大値は，紐の長さs_iによって定められてしまうことになる．すなわち，s_iの関数である．これを

$$f_i(s_i) = \max_{\substack{\sum_{j=i}^{N} u_j = s_i \\ u_j \geqq a_j}} \frac{1}{2}\sum_{j=i}^{N} m_j\sqrt{u_j^2 - a_j^2} \tag{8}$$

と書くことにしよう．

さて，この系は，P_{i-1}の次の滑車P_iによってその左右の部分に分けて考えることができる．すなわち，錘m_iが下にさがろうとする部分と，錘m_{i+1}，m_{i+2}，…，m_Nがさがろうとする部分である．この2つは，滑車P_iを介して紐の長さを奪い合っている．

いま，紐の端をP_{i-1}に固定したまま，錘をバランスさせ，次に，滑車P_iの所で紐をおさえてみても，錘は動かない．左右の部分が最適な位置にあるからである．そこで，紐をつまんでこれを左右に動かしてみよう．そうすると，‘錘達’はその高さを変えるだろうが，P_iによって分けられる2つの部分の1次のモーメントは，どちらもつねに‘自動的に’，それぞれ紐の長さによって与えられた制約条件の下で，最大値になる．

いま，P_iから右側の紐の長さがs_{i+1}という値をとる所で紐をおさえよう．P_{i-1}からP_iまでの間の紐の長さは$(s_i - s_{i+1})$であり，錘m_iはこれをピンと張って1次のモーメントを最大にする．その値は

$$\frac{1}{2} m_i\sqrt{(s_i - s_{i+1})^2 - a_i^2} \tag{9}$$

となる．

一方，P_iから右側の錘達が作る部分系は，紐の長さがs_{i+1}だという条件で

$$\sum_{j=i}^{N} u_j = s_{i+1} \tag{10}$$

の下で1次のモーメント

$$\frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N} m_j\sqrt{u_j^2 - a_j^2} \tag{11}$$

を最大にする．そして，この最大値は(8)式の流儀で書けば

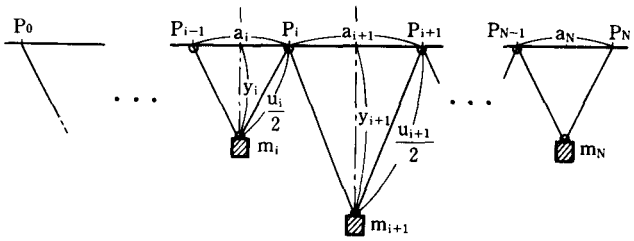

図　6－1

やない　ひろし　慶応義塾大学　理工学部
〒223　横浜市港北区日吉3-14-1

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$f_{i+1}(s_{i+1})=\max_{\substack{\sum_{j=i+1}^{N} u_j=s_{i+1}\\ u_j\geqq a_j}} \frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{N} m_j\sqrt{u_j^2-a_j^2} \tag{12}$$

となる．

そこで，P_{i-1}から右辺の錘達が作る1次のモーメントは(9)および(12)式を加えて

$$\frac{1}{2}m_i\sqrt{(s_i-s_{i+1})^2-a_i^2}+f_{i+1}(s_{i+1}) \tag{13}$$

と書くことができる．滑車P_iの所で紐をつまんでいる指をはなしてみよう．この滑車の左右の部分は互いに引きあって，釣合いの位置，いいかえれば，P_{i-1}から右側にある錘が全体として作る1次のモーメントが最大になる位置でとまる．この1次のモーメントがすなわち，(8)式の$f_i(s_i)$である．そしてこのとき，(13)式の中で変化するのはs_{i+1}だけである．したがって，関係式

i	a_i	m_i
1	4.0	1.2
2	6.0	0.9
3	8.0	0.9
4	10.0	1.2

表 6.1 動的計画法の計算結果

s	f_1 (s_1)	w_1 (s_1)	f_2 (s_2)	w_2 (s_2)	f_3 (s_3)	w_3 (s_3)	f_4 (s_4)
10	0.000	0	0.000	0	0.000	0	0.000
11	0.000	0	0.000	0	0.000	0	2.750
12	0.000	0	0.000	0	0.000	0	3.980
13	0.000	0	0.000	0	0.000	0	4.984
14	0.000	0	0.000	0	0.000	0	5.879
15	0.000	0	0.000	0	0.000	0	6.708
16	0.000	0	0.000	0	0.000	0	7.494
17	0.000	0	0.000	0	0.000	0	8.249
18	0.000	0	0.000	0	0.000	10	8.980
19	0.000	0	0.000	0	2.750	11	9.693
20	0.000	0	0.000	0	4.605	11	10.392
21	0.000	0	0.000	0	5.835	12	11.080
22	0.000	0	0.000	0	6.839	13	11.758
23	0.000	0	0.000	0	7.734	14	12.427
24	0.000	0	0.000	18	8.579	14	13.090
25	0.000	0	2.750	19	9.408	15	13.748
26	0.000	0	4.605	20	10.194	16	14.400
27	0.000	0	6.227	20	10.949	17	15.048
28	0.000	24	7.458	21	11.680	18	15.692
29	2.750	25	8.462	22	12.393	19	16.333
30	4.605	26	9.357	23	13.092	20	16.971
31	6.405	26	10.201	24	13.790	20	17.606
32	8.027	27	11.031	25	14.477	21	18.238
33	9.258	28	11.816	26	15.155	22	18.869
34	10.262	29	12.575	26	15.825	23	19.498
35	11.157	30	13.330	27	16.488	24	20.125
36	12.040	30	14.061	28	17.145	25	20.750
37	12.885	31	14.774	29	17.797	26	21.374
38	13.714	32	15.473	30	18.445	27	21.996
39	14.500	33	16.171	31	19.089	28	22.618
40	15.263	33	16.858	32	19.730	29	23.238
41	16.022	34	17.536	33	20.368	30	23.857
42	16.777	35	18.206	34	21.003	31	24.475
43	17.508	36	18.869	35	21.636	32	25.093
44	18.221	37	19.526	36	22.266	33	25.709
45	18.931	37	20.179	37	22.895	34	26.325
46	19.630	38	20.827	38	23.523	34	26.940
47	20.328	39	21.471	39	24.150	35	27.554
48	21.015	40	22.111	40	24.775	36	28.168
49	21.696	40	22.749	41	25.399	37	28.781
50	22.374	41	23.387	41	26.021	38	29.394

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

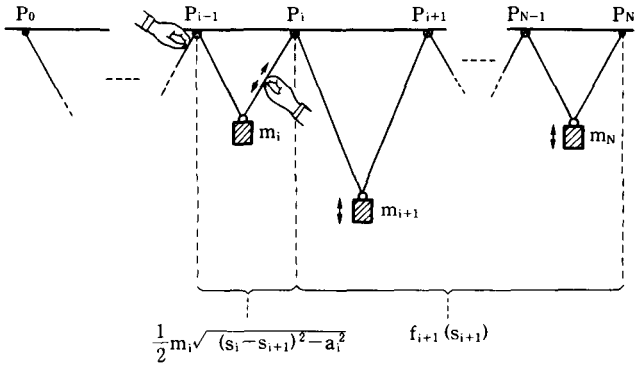

図 6−2

$$f_i(s_i)=\max\ \left[\frac{1}{2}m_i\sqrt{(s_i-s_{i+1})^2-a_i^2}+f_{i+1}(s_{i+1})\right]$$

$$a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_N\leqq s_{i+1}\leqq s_i-a_i$$

$$a_i+a_{i+1}+\cdots+a_N\leqq s_i \tag{14}$$

が得られる．これがいわゆる動的計画法の漸化式である．ここにs_{i+1}の動き得る範囲の上下限は，それぞれ，錘m_iを天井に触れるまで引っ張り上げた状態と，可能なかぎり下に引っ張って，逆に錘m_{i+1}，m_{i+2}，…，m_Nが皆天井に触れるようにした状態に対応している．

ところで，$f_N(s_N)$は，両端をP_{N-1}とP_Nに固定された，長さs_Nの紐によって吊るされた，ただ1個の錘m_Nが作る1次のモーメントであるから，容易にわかるように

$$f_N(s_N)=\frac{1}{2}m_N\sqrt{s_N^2-a_N^2}\quad s_N\geq a_N \tag{15}$$

となる．これを境界条件という．そこで，これを用いて(14)式を$i=N-1$から逆に$i=1$まで解けばよい．

このような作業には計算機の力を借りるのが普通である．(14)式においてs_iやs_{i+1}を一定のきざみ幅で離散化し，$f_i(s_i)$や$f_{i+1}(s_{i+1})$は表の形で計算機に記憶させ，最大化には，この範囲での総当りを用いる．また，(14)式の右辺の[　]内の値を最大にするs_{i+1}の値$\widehat{s_{i+1}}$はs_iによって決定されるのだから，これを

$$\widehat{s_{i+1}}=w_i(s_i) \tag{16}$$

と書くことにしよう．すなわち，(14)式にこれを代入すれば，

$$f_i(s_i)=\frac{1}{2}m_i\sqrt{(s_i-w_i(s_i))^2-a_i^2}+f_{i+1}(w_i(s_i)) \tag{17}$$

と書くことができる．そして，$w_i(s_i)$も(14)式の計算のかたわら，表の形で計算機に記憶させていくことにしよう．

このような計算結果の一例が**表6−1**に示されている．錘の重さm_iの固定滑車の間隔a_iは表の右上に示すとおりであるが，いま，紐の長さ$L=50$の場合を調べてみよう．

表中にも印がつけられているように，

$$f_1(50)=22.374,\quad w_1(50)=41.0 \tag{18}$$

が読みとれる．$f_1(50)=22.374$というのはP_0からP_4までの系全体の1次モーメントの値であり，これが，錘の位置をいろいろに動かして得られるうちの最大値である．

$w_1(50)=41$はP_1からP_4までの紐の長さが41になるべきことを示している．いいかえれば，P_0とP_1の間に配分される紐の長さが

$$u_1=L-w_1(50)=50-41=9 \tag{19}$$

となる（べき）ことを示している．

そこで次に，P_1からP_4までについて見れば，ここから先に割り当てられる紐の長さは，上述のごとく41であるから，表から

$$f_2(41)=17.536,\quad w_2(41)=33 \tag{20}$$

が読みとれる．さらにこれから，

$$f_3(33)=15.155,\quad w_3(33)=22 \tag{21}$$

$$f_4(22)=11.758 \tag{22}$$

また，$w_4(22)$は計算するまでもなく

$$w_4(22)=0 \tag{23}$$

となる．これらの値がもつ意味は$i=1$の場合と同様であるから説明を要しないであろう．

さらに，これらの結果から

$$u_1=50-41=9 \tag{19再}$$

$$u_2=41-33=8 \tag{24}$$

$$u_3=33-22=11 \tag{25}$$

$$u_4=22-0=22 \tag{26}$$

を計算して作図した結果が**図6−3**である．

このように，動的計画法と数値計算によれば，滑車と錘の個数がいくら増えても，同じことの繰りかえし

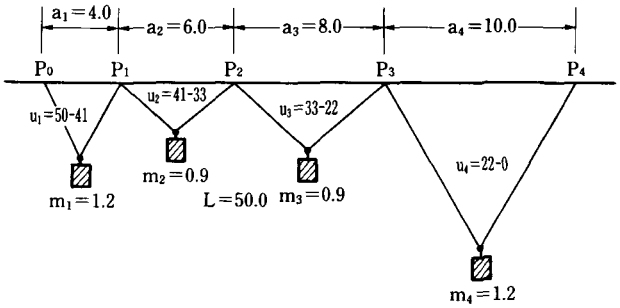

図 6−3

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

で，必ず数値解を導くことができる．あとは計算効率と精度の向上が問題になるだけであるが，前者については今日の計算機の性能からしてあまり問題にならないし，後者には緩和法を併用するなどの工夫がありうる．とにかく，数値解が手っとり早く得られることは，動的計画法の大きな強みである．

しかし一方において，数値解から，最適解がもつ一般的な性質を読みとることは必ずしも容易ではない．たとえば，図6－3をよく見れば，錘m_1とm_4およびm_2とm_3の所において紐のなす角度がそれぞれ等しくなっている――いいかえれば紐が平行になっていることに気づく．これは，この数値例において，錘の目方の間に，$m_1=m_4$および$m_2=m_3$という関係が成立しているためであるが，このことは4節の(12)および(13)式を一般化して考えれば，容易に推察できるし，証明もできる．

動的計画法はそれでも，漸化式の構造をもっているので，最適解がもつある種の性質の一般化の証明には役立つことがある．一例をあげよう．

今，問題をもう少し絞って，錘の重さと，固定滑車の間隔がどれも等しい場合を考えてみよう：

$$m_1=m_2=\cdots=m_N=m \tag{27}$$

$$a_1=a_2=\cdots=a_N=a \tag{28}$$

解は，誰にでも想像できるとおりで，紐は各錘に等しく配分され，錘は天井から等距離の所にぶらさがる．このことを式の上で確かめよう．

この場合，動的計画法の漸化式(以下制約条件省略)は

$$f_i(s_i)=\max_{s_{i+1}}\left[\frac{1}{2}m\sqrt{(s_i-s_{i+1})^2-a^2}+f_{i+1}(s_{i+1})\right] \tag{29}$$

であり，境界条件は

$$f_{N-1}(s_{N-1})=\frac{1}{2}m\sqrt{s_{N-1}^2-a^2} \tag{30}$$

となる．次に$i=N-2$の場合を考えれば，漸化式

$$f_{N-2}(s_{N-2})=\max_{s_{N-1}}\frac{1}{2}m\left[\sqrt{(s_{N-2}-s_{N-1})^2-a^2}+\sqrt{s_{N-1}^2-a^2}\right] \tag{31}$$

において，右辺の最大値は，[　]内の関数の形からして，微分によって求めることができる．すなわち，

$$\frac{d}{ds_{N-1}}[\sim]=\frac{-(s_{N-2}-s_{N-1})}{\sqrt{(s_{N-2}-s_{N-1})^2-a^2}}+\frac{s_{N-1}}{\sqrt{s_{N-1}^2-a^2}}=0 \tag{32}$$

をs_{N-1}について解けば，目視により，

$$\hat{s}_{N-1}=w_{N-1}(s_{N-2})=\frac{1}{2}s_{N-2} \tag{33}$$

が得られる．それゆえ，これを(31)式に代入して

$$f_{N-2}(s_{N-2})=\frac{m}{2}\sqrt{s_{N-2}^2-(2a)^2} \tag{34}$$

を得る．

この式から$f_{N-1}(s_{N-1})$の一般式が

$$f_{N-i}(s_{N-i})=\frac{m}{2}\sqrt{s_{N-i}^2-(ia)^2} \tag{35}$$

となることは容易に推察されることではあるが，これを確かめるには，いわゆる数学的帰納法を用いればよい．すなわち，帰納法の仮説として，

$$f_{N-i+1}(s_{N-i+1})=\frac{m}{2}\sqrt{s_{N-i+1}^2-((i-1)a)^2} \tag{36}$$

としてf_{N-i}を求めてみよう．漸化式は

$$f_{N-i}(s_{N-i})=\max_{s_{N-i+1}}\frac{m}{2}\left[\sqrt{(s_{N-i}-s_{N-i+1})^2-a^2}+\sqrt{s_{N-i+1}^2-((i-1)a)^2}\right] \tag{37}$$

となる．ここでも，右辺の[　]内をs_{N-i+1}で微分してゼロとおけば，

$$\frac{d}{ds_{N-i+1}}[\sim]=\frac{-(s_{N-1}-s_{N-i+1})}{\sqrt{(s_{N-i}-s_{N-i+1})^2-a^2}}+\frac{s_{N-i+1}}{\sqrt{s_{N-i+1}^2-((i-1)a)^2}}=0 \tag{38}$$

となるから，[　]内を最大にするs_{N-i+1}が

$$\hat{s}_{N-i+1}=w_{N-i+1}(s_{N-i})=\frac{i-1}{i}s_{N-i} \tag{39}$$

であることが直ちにわかる．これを(37)式に代入すれば

$$f_{N-i}(s_{N-i})=\frac{m}{2}\sqrt{s_{N-i}^2-(ia)^2} \tag{35再}$$

が得られ，(35)式が確認されたことになる．

紐の長さL，各錘の目方がmの系全体の1次のモーメントはしたがって，

$$f_0(L)=\frac{m}{2}\sqrt{L^2-(Na)^2} \tag{40}$$

となる．Naが固定滑車P_0とP_Nの間隔であることに注意すれば，これが4節の(30)式の一般化になってることがわかる．

7．デモンストレーションの方法とあとがき

以上，滑車と紐と錘という3つの道具を使った実験を想定して初等数理計画法のいろいろな面をながめてきた．小道具は，幾何学と力学を通じてわれわれの直観的理解を助けてくれる．こうなれば，自分でも実際に器具を使って‘ヤッテ’みたくなるのがエンジニアの性(さが)というものだ．

この実験を，教室でのデモンストレーションが可能なように準備するには次のようにすればよい．図7－1に示すように，市販の真鍮製の滑車を，L字型に貼り

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

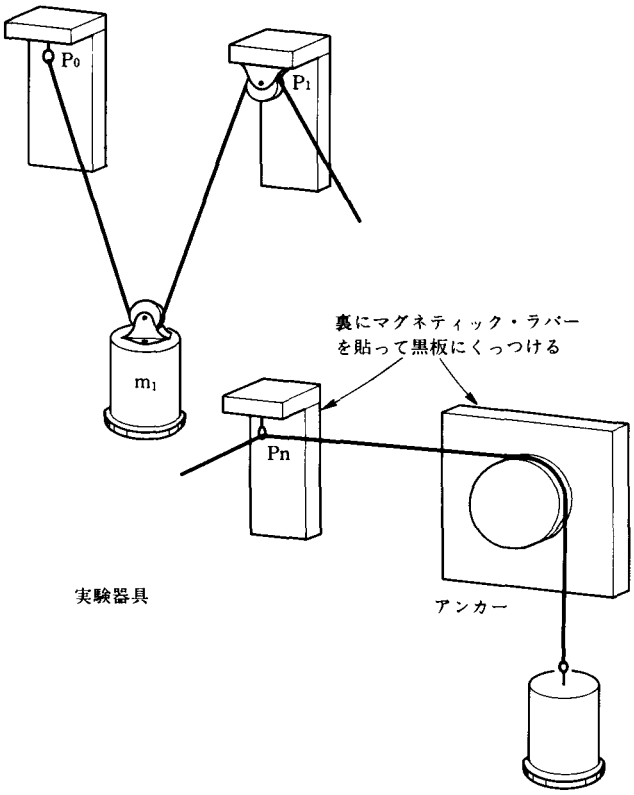

図 7−1

合わせた板に取りつけ，これを板の背中に貼りつけたマグネット・ラバーで黒板に固定して固定滑車とする．動滑車と錘は，写真用35mmフィルムのプラスチック製空き缶の底に同様の滑車をとりつけ，中にパチンコ玉を入れたものである．紐には，よく見えるように，黄色いナイロン糸を用いる．また，糸の長さの設定のためには，糸を多少長めに切っておき，図のようなアンカーを用いればよい．すなわち，糸の右端に錘をつけ，やはりマグネット・ラバーで黒板に固定した厚い円板に巻きつけておけば紐はしっかりととまる．(このような方法で紐をしっかりととめること自体，Coulombマサツの応用例として大変興味深い．[1])

さて，このようにして組み立てた器具を示して，動かしつつ，本稿の例題を説明すれば，実物がもつ迫力によって大きな説得力が期待できる．ただ，ちょっと注意しておきたいことは，市販の普通の滑車が意外に大きなCoulombマサツをもち，手を放しても錘が最終的な位置に到達する以前に無定位の状態で止まってしまいがちなことである．目的関数である1次のモーメントが平らな形状をもつときは，特にその心配がある．滑車にモリブデン・グリース等をよく塗って滑りやすくしたり，紐を指ではじくなどの配慮が必要になる．筆者の経験でもこの辺のところはかなり苦労した．

実験がむずかしければ，アニメーションでやればよい．ねらいは，初等数理計画法を幾何学と力学で直観化することなのだし，力学的事実の方はごく単純なもので，われわれの日常経験の中にもあることだから，事実関係を疑う者もいないだろう．実際のところ，筆者は本稿を，映像化された講義のプランとして書いてみたのである．将来，映像化が実現すれば幸いだと願っている．

[1] 曽田 範宗「摩擦の話」 岩波新書 1971

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．