このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた智恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

OR メモランダム

# 一対比較データの解析にも役立つ定差方程式

牧野　都治

## ・一巡3角形の数の平均と分散

一対比較データの解析法の1つとして，選好多角形内に生じている一巡3角形の数を調べ，

帰無仮説$H_0$；「判定がランダムである」

を検定する方法があることは，ケンドールの本(Rank Correlation Methods)などによって，よく知られている．ここで，選好多角形は各頂点を矢線で結んだ多角形であるが，たとえば2つの頂点A,Bについて，A→Bのように，Bに矢が向けられていれば，AよりBの方が好まれていることを表わす．また，AとBとに関して，判定がランダムであるということは，矢がどちらに向くかが確率1/2で定まることを意味している．(これらのことについては，本誌'93年7月号の拙著「一対比較データの図表示に思う」を参照されたい)

さて，このような検定を行なうために，選好$n$角形内に生ずる一巡3角形の数$T_n$の確率分布がわかっていると都合がよい．少なくとも，$T_n$の平均・分散ぐらいは知っておきたい．これらを，ケンドールの本では，次のように求めている．まず平均についてであるが，頂点が$i,j,k$である1つの3角形をとり出したとき，それが一巡3角形であれば$P_{ijk}=1$，そうでなければ$P_{ijk}=0$となる確率変数$P_{ijk}$を考えて，

$$T_n=\sum_{i,j,k}P_{ijk}$$

とおけば，これが一巡3角形の級数になる．ただし，Σは相異なるすべての$i,j,k$についての和をとることを意味している．ここで，1つの3角形をとり出したとき，それが一巡3角形となる確率を考えてみると，左まわりと右まわりがあるので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$$

となる．よって

$$E(P_{ijk})=1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.$$

これより$E(T_n)$は

$$E(T_n)=E(\sum_{i,j,k}P_{ijk})=\frac{1}{4}\cdot\binom{n}{3}$$
$$=\frac{1}{24}n(n-1)(n-2) \quad\cdots\cdots(1)$$

と求まる．また，分散$V(T_n)$については，2次モーメント$E(T_n^2)$を計算しておいて，$V(T_n)=E(T_n^2)-E^2(T_n)$と求めればよい．そこでケンドールでは，次のような計算を行なう．はじめに$E[(\Sigma P_{ijk})^2]$を求める．そのために$(\Sigma P_{ijk})^2$の展開式を考え，その期待値をとって整頓すると，

$$E[(\sum_{i,j,k}P_{ijk})^2]=\frac{1}{16}\cdot\binom{n}{3}\cdot\left\{\binom{n}{3}+3\right\}$$

となり，分散が

$$V(T_n)=\frac{1}{32}n(n-1)(n-2) \quad\cdots\cdots(2)$$

と求まる．

これらはいずれもよく知られていることであるが，本稿では以下，(1)式や(2)式が差分を用いて容易に求められること，および一巡3角形でなく一巡4角形のときにはどうなるか，などについての考えを述べたい．

## ・定差方程式による求め方

選好$n$角形内の一巡3角形の数$T_n$について，次の式が成り立つ．

$$T_n=T_{n-1}+R_n \quad (n\geq 4) \cdots\cdots(3).$$

ただし，$R_n$は選好$(n-1)$角形内の2つの頂点と第$n$番目の点とを結んだときできる一巡3角形の数を表わす．そこで，(3)式の両辺の期待値をとると

$$E(T_n)=E(T_{n-1})+E(R_n).$$

ところで，$(n-1)$角形でたとえば頂点1，2を結ぶ辺について，図1のように矢が2へ向いていれば$n$→1

まきの　とじ　東京理科大学　経営学部
〒346 久喜市下清久

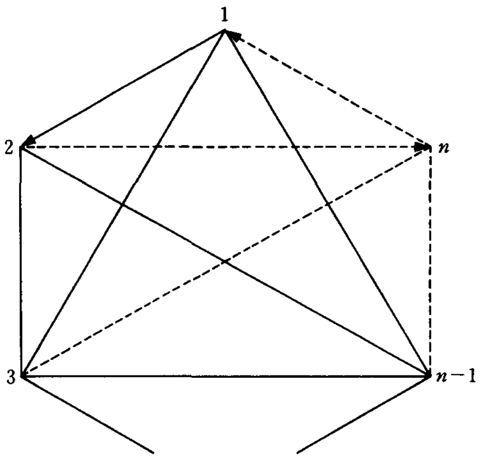


**図1　$n$番目の頂点を結ぶ3角形**

$\rightarrow 2$を頂点とする3角形が一巡する確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^2$. 矢が2から1へ向いていても，$n\rightarrow 2\rightarrow 1$を頂点とする3角形が一巡する（前とは逆順になるが）確率は$\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

$n$を頂点とする，このような3角形が$\binom{n-1}{2}$個できるので，

$$E(R_n)=\frac{1}{4}\cdot\binom{n-1}{2}.$$

よって，

$$E(T_n)=E(T_{n-1})+\frac{1}{4}\cdot\binom{n-1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

ここで，$E(T_3)=\frac{1}{4}$であることを考慮して(4)式を解くと，結局(1)式と同じものが得られる．

それでは分散はというと，(3)式の右辺で，$T_{n-1}$と$R_n$とは独立であると考えてよいので，

$$V(T_n)=V(T_{n-1})+V(R_n)\quad(n\geq 4).$$

いまの場合，$V(R_n)$は

$$V(R_n)=\binom{n-1}{2}\times\left\{\left(1^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{3}{4}\right)-\left(1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{3}{4}\right)^2\right\}=\frac{3}{16}\cdot\binom{n-1}{2}$$

であるから

$$V(T_n)=V(T_{n-1})+\frac{3}{16}\cdot\binom{n-1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

ここで，$V(T_3)=\frac{3}{16}$であることを考慮して(5)式を解くと，(2)式と同じ$V(T_n)$の式が得られる．

## ・ 一巡$k$角形の数の平均と分散

一巡3角形に限らず，一般に一巡$k$角形($k\geq 4$)を活用しようとするには，判定がランダムであるとしたとき，選好$n$角形内に生ずる一巡$k$角形の数$T_n(k)$の平均・分散を計算しておくのがよい．そこで，一巡3角形のときと同様に，定差方程式をつくってみると，

$$T_n=T_{n-1}+R_n\quad(n\geq k\geq 4) \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる．(6)式での$T_n$や$R_n$は，$T_n(k)$，$R_n(k)$と書かれるべきものであるが，以下その意味での$k$を省略することにする．さて，平均$E(T_n)$は

$$E(T_n)=E(T_{n-1})+E(R_n) \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

から求めることができる．ただし，一巡$k$角形については$E(R_n)$を計算するのに，ループを数えるか数えないかを定めておかなければならない．この，ループを数えるかどうかについては，前記「一対比較データの図表示に思う」に詳述してあるが，「ループを数えない場合」には

$$E(R_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\times 2\cdot\binom{n-1}{k-1} \cdots\cdots\cdots\cdots(8).$$

よって(7)式は

$$E(T_n)=E(T_{n-1})+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

となり，これを解いて

$$E(T_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\binom{n}{k}$$

が得られる．

一方，「ループを数える場合」には(8)式が，

$$E(R_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\{(k-1)!\}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

となるので，(7)式は

$$E(T_n)=E(T_{n-1})+\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\{(k-1)!\}\cdot\binom{n-1}{k-1}$$

となり，これを解いて$E(T_n)$の式が

$$E(T_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\times\{(k-1)!\}\cdot\binom{n}{k}$$

と求まる．

それでは，分散$V(T_n)$はどうかというと，(6)式右辺$T_{n-1}$と$R_n$とが独立でないので，

$$V(T_n)=V(T_{n-1})+V(R_n)$$

とすることができない．そこで，この方法での解はあきらめなければならない．この場合にはやはり，ケンドールの本にあるような方法を拡張して，こつこつ解くよりしかたないのかもしれない．