OR演習例解

空港での飛行機発着スケジューリング

——その2——

鈴木　久敏

9．前回の復習

教師：前回の続きを考えてみましょう．JAN航空の問題を思い出してください．そして，図9のダイヤグラムを描きましたね．

運航に必要な最小の機数を求める問(1)は,『飛行機を空港における在庫とみなして，在庫切れが起こらないようにすれば良い』のでしたね．

空港使用料が滞留時間の2乗に比例するとき，空港使用料総額を最小にする問(2)は,『空港に滞留する飛行機をFIFOで管理する，すなわち，先に到着した飛行機から順番に出発させれば良い』という結論でした．

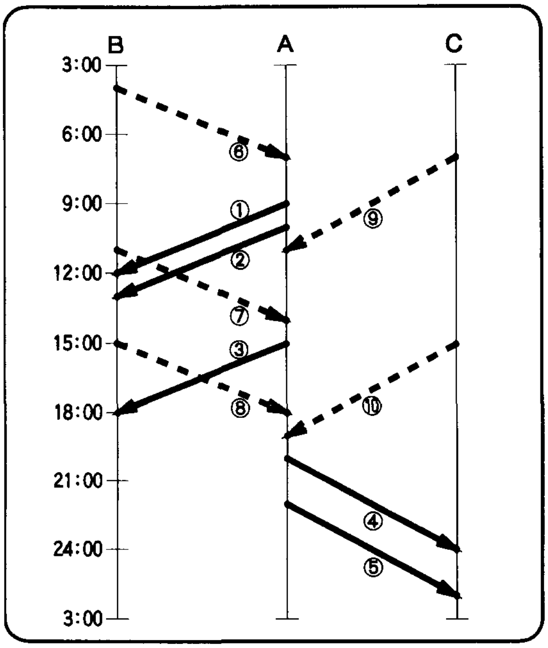

図9　JAN航空のダイヤグラム

10．凸関数とFIFOルール

教師：さて，空港使用料が滞留時間の2乗ではなく，3乗とか4乗に比例する場合，あるいは$tan(T_i/24)$（ここでT_iは飛行機iの滞留時間）に比例する場合など，空港使用料がもっと複雑な関数で与えられる場合，総費用（空港使用料総額）を最小にする運航計画はどうなると思う？

高橋：前回と同じように，数学モデルを作って証明すればいいんでしょう．たとえば3乗の場合，FIFOで管理したときの滞留時間の3乗和S_{FIFO}と，LIFOで管理したときの滞留時間の3乗和S_{LIFO}の大小を調べればいいんでしょう．

［問題］JAN航空会社は，毎日A，B，Cの3空港を以下に示す時刻表で運航している．

便番号	出発空港	出発時刻	到着空港	到着時刻
①	A	9:00	B	12:00
②	A	10:00	B	13:00
③	A	15:00	B	18:00
④	A	20:00	C	24:00
⑤	A	22:00	C	2:00
⑥	B	4:00	A	7:00
⑦	B	11:00	A	14:00
⑧	B	15:00	A	18:00
⑨	C	7:00	A	11:00
⑩	C	15:00	A	19:00

（1）この時刻表通りに運航するのに飛行機は何機必要か？

（2）着陸1回当たりの空港使用料が滞留時間の2乗に比例するとき，空港使用料の総額を最小にするには，飛行機をどのように運航したらよいか？

＊OR演習部会編「OR演習問題集」日科技連より採録

すずき　ひさとし
筑波大学　大学院経営システム科学
〒112　文京区大塚3-29-1

教師：そう簡単かな？　今度は関数が複雑だから，FIFOやLIFOが最適かどうかもわかりませんよ！

ここでは，もう少し別な角度から考えてみましょう．もう一度，空港使用料が滞留時間の2乗に比例する場合，すなわち，空港使用料が$f(T_i)=\alpha T_i^2$（αは比例定数）で与えられる場合を考えてみましょう．前回の議論でわかったように，飛行機が2機の場合，その滞留時間をT_1，T_2とすると，

(13)　　$T_1+T_2=T$（一定）

となり，2機の総滞留時間Tは常に一定です．この条件（厳密にはT_1，T_2の非負条件も必要）の下で総費用

(14)　　$S=f(T_1)+f(T_2)=\alpha T_1^2+\alpha T_2^2$

を最小にするには，個々の飛行機の滞留時間を

(15)　　$T'_1=T'_2=T/2$

とするのが最も望ましかったわけです．すなわち，総滞留時間Tを2機の飛行機が均等に分け合うのが最適です．このとき，総費用S'は

(16)　　$S'=f(T'_1)+f(T'_2)=2f(T/2)=2\alpha(T/2)^2$

となります．この状況を図10の上半分に図示しました．

ここで，もし総滞留時間Tを均等に分け合うのを止めて，T_1をΔ時間だけ増やすと，式(13)より，T_2を逆にΔだけ減少させて，

(17)
$$T''_1=(T/2)+\Delta$$
$$T''_2=(T/2)-\Delta$$

としなければなりません．総費用S''は，

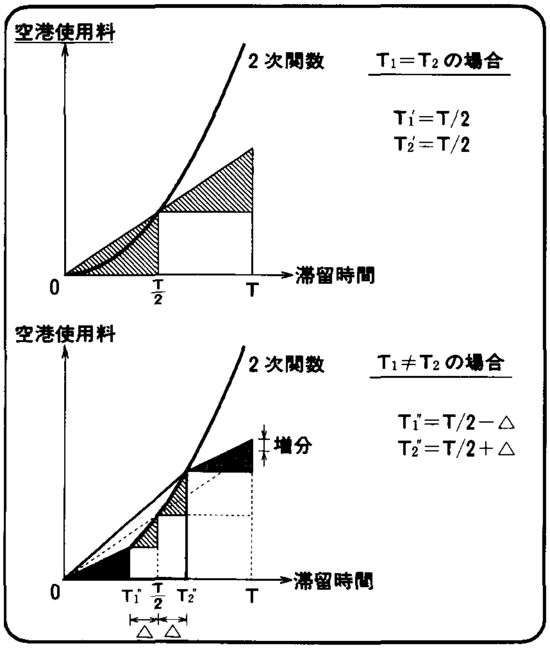

図10　空港使用料の特性

(18)
$$\begin{aligned}S''&=f(T''_1)+f(T''_2)\\&=\alpha\{(T/2)+\Delta\}^2+\alpha\{(T/2)-\Delta\}^2\\&=2\alpha(T/2)^2+2\alpha\Delta^2\\&\geqq 2\alpha(T/2)^2\\&=S'\end{aligned}$$

となり，確実に式(16)のS'よりも大きくなります．その様子を図示したのが，図10の下半分です．

高橋：本質的には，前回の最後に先生が話した凸2次計画と同じことではありませんか？　どこか違うところがあるんですか？

教師：いい質問ですね．図10で，下半分の$T_1\neq T_2$の場合を見てください．総滞留時間Tを2機の飛行機で均等に分け合うのを止めると，総費用が$T_1=T_2$の場合より増えますね．そうなるのは空港使用料$f(T_i)$が2次関数のときだけですか？

高橋：よくわかりません．滞留時間をΔだけ増やすときの総費用の増加分が，Δだけ減らすときの総費用の減少分より大きければいいわけですよね．

教師：それはそのとおりですが，そうなるのは関数形がどんな場合ですか？　空港使用料$f(T_i)$が3次関数や4次関数，あるいは$tan(T_i/24)$の場合を考えてみてください．

高橋：先生！　わかりました．関数の形が下に丸まっているからですね．

教師：ハイ，そのとおりです．数学では，下に丸まっている関数を『凸関数』と言います．

$f(T_i)$が凸関数であることの数学的な定義は，

(19)
$$\lambda_1 f(T_1)+\lambda_2 f(T_2)\geqq f(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2)$$
$$\text{for}\ \forall\lambda_1,\forall\lambda_2\ \text{such that}\ 0\leqq\lambda_1,\lambda_2\leqq 1\ \text{and}\ \lambda_1+\lambda_2=1$$

です．$T''_1+T''_2=T$より，式(18)は，まさしく式(19)で

$$\lambda_1=\lambda_2=1/2,\quad T_1=T''_1,\quad T_2=T''_2$$

と置いたものに他ありません．

結論として，皆さんに知ってほしいことは，『空港使用料が滞留時間に関して，2次関数の場合に限らず，もっと一般的に，凸関数ならば，総滞留時間Tを2機の飛行機が均等に分け合うのが最適になる』ことです．別な言い方をすると，到着時刻と出発時刻がダイヤで決められているので，実際に滞留時間を完全に均等に分け合うことは不可能なので，『空港使用料が滞留時間に関して凸関数ならば（均等にもっとも近くなる），FIFOルールに従って飛行機の離発着を管理するのが最適になる』ことです．

もちろん，前にも述べたように，上述の結論は飛行機の離発着に限らず，一般の在庫に対しても成り立つ性質です．空港に滞留している飛行機も『在庫！』なんです．

11．コスト構造と在庫政策

教師：さて，ここでちょっと別な質問をしましょう．中村さん！　あなたは女性なので，よくスーパーで食料品など買い物をするかと思いますが，どうですか？

中村：ハイ．私は大学からの帰りが遅いことが多いので，いつもは母や妹がいきます．でも，夕方に帰宅するときは買い物してから帰ることがあります．

教師：それじゃ，たまたま今日あなたが卵を買って帰ったところ，家の冷蔵庫の中に，お母さんが2日前に買ってきた卵と，妹さんが昨日買ってきた卵が，何個か残っていたとしましょう．今晩，卵料理を作るとき，あなたはどの卵から使いますか？

中村：それは，卵が古くなって腐ってしまうともったいないから，一番古い2日前の卵を最初に使います．

教師：そうですね．健全な経済観念の持ち主なら，誰でもそうするでしょう．それはなぜでしょうか？

中村：「なぜ？」って言われても……．

教師：冷蔵庫の中の卵も在庫ですね．『一番古い卵から使う』ということは，中村さんは『冷蔵庫の卵をFIFOで管理している』ということです．すなわち，中村さんは暗黙のうちに，冷蔵庫の中の卵について凸関数の在庫費用を意識して，在庫管理していることになります．実際，もし10個入りパックc円（$c>0$）で買ってきた卵が毎日1個ずつ腐っていくとすると，購入後T日目には卵の単価が$c/(10-T)$となって，凸関数になりますから，中村さんの行動は合理的なわけです．

次に，では在庫費用$f(T_i)$が凸関数ではなく，逆に凹関数の場合（上に丸まっているとき）は，どんな在庫管理の方針を立てるべきでしょうか？

佐藤君！　どうなると思う？

佐藤：もしかして，凸関数のときFIFOが最適だから，凹関数のときはLIFOが最適だったりして……．

教師：いいカンしてますね，佐藤君！　そのとおりなんだ．$f(T_i)$が凹関数であることの定義は，式(19)の逆で

$$\lambda_1 f(T_1)+\lambda_2 f(T_2)\leqq f(\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2) \quad \text{for } \forall\lambda_1, \forall\lambda_2 \text{ such that } 0\leqq\lambda_1,\lambda_2\leqq 1 \text{ and } \lambda_1+\lambda_2=1 \qquad (20)$$

となることです．したがって，在庫期間（滞留時間）

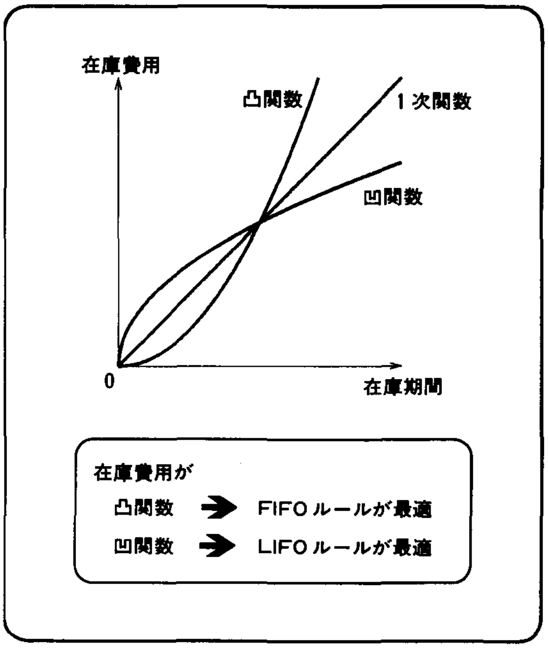

図11　コスト構造と最適在庫政策

をアンバランスにした方が総在庫費用が安くなるわけですから，在庫をLIFOで管理する政策が最適となります．これをまとめたのが図11です．

なお余談ですが，$f(T_i)$が1次関数のときは，凸関数でもあり，凹関数でもあるわけですから，在庫をFIFOで管理しようと，LIFOで管理しようと，もっと極端にいえばデタラメに管理しても，どれでも最適なんです．なにしろ総在庫期間$\Sigma T_i=T$は一定なんですから．

教師：再び中村さんに聞きますが，中村さんがスーパーで卵のパックを買うとき，今日の日付と昨日の日付のパックがあったら，どちらを買いますか？

中村：もちろん少しでも新鮮な今日の日付のものです．

教師：ということは，中村さんはスーパーで買い物するとき，LIFOルールを採用しているということですね．これは，中村さんが『暗黙の内に凹関数の在庫費用を意識している』といっていいのかもしれませんね（厳密には$\Sigma T_i=T$が成り立たないので，凹関数の場合と類似な議論が成り立つわけではない）．

このように同じ中村さんが，自宅の冷蔵庫の中の卵とスーパーの店頭の卵では，別な在庫費用を想定して行動している．すなわち，状況や立場によって，在庫に対するコスト構造が違ってきているわけです．

もちろんスーパーの店頭では，仕入れた卵がFIFOで捌けるように，店長がせっせと日付の古い卵パックを客が取りやすい上の方に積んでいるわけですが（笑

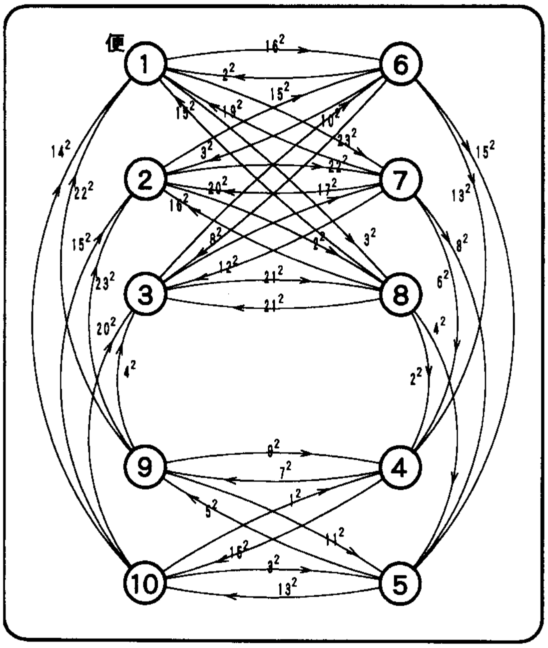

図12　ネットワーク

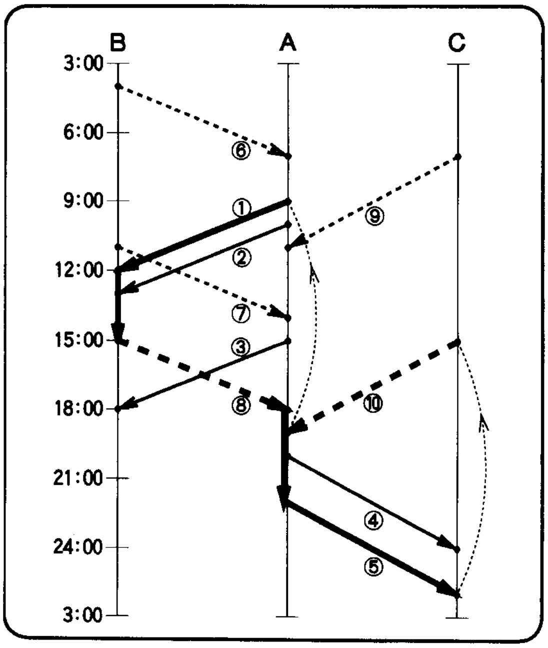

図13　機体の許容な運航（ダイヤグラム上）

い）.

12. ネットワーク・モデル

教師：再び，話を問(2)の最小費用の運航計画に戻しましょう．じつは，今まで考えてきたモデルと全く違う，別なモデルを工夫することもできるんです．

図12は，全部の便①，②，……，⑩を点で表わしたものです．図９のダイヤより，①便はＢ空港到着なので，次はＢ空港出発の⑥，⑦，⑧便のいずれかに使える．そのことを，図12では，点①から点⑥，⑦，⑧へ向かう３本の矢印（①→⑥，①→⑦，①→⑧）で表わしている．①便を次に⑥便として使うと，飛行機がＢ空港に16時間滞留するので，矢印①→⑥に数値16^2を付し，そのときの空港使用料を表わす．また，点①から点④へ向かう矢印が描かれていないが，これは（空港が違うので）①便を④便として使えないことを意味している．

図12のように，点と数値がついた矢印でできた線図を『ネットワーク』というんだ．専門用語では，ネットワークの点を『頂点』，矢印を『枝』，矢印に付された数値を『重み』っていうんだ．

さて，図９のダイヤの代わりに，図12のネットワークを使って，総費用の最小化を考えることにする．

まず，ダイヤの上で飛行機を運航してみる．たとえば，図13のように，飛行機が①→⑧→⑤→⑩→①の順に飛んで，再び①に戻ったとしよう．これと同じことが，ネットワークの上ではどうなりますか？　山田君！

山田：ハイ，簡単です．ネットワークの上では，**図14**のようにループになります．ダイヤとちょうど同じ順序で，①→⑧→⑤→⑩→①の順に頂点を通ります．

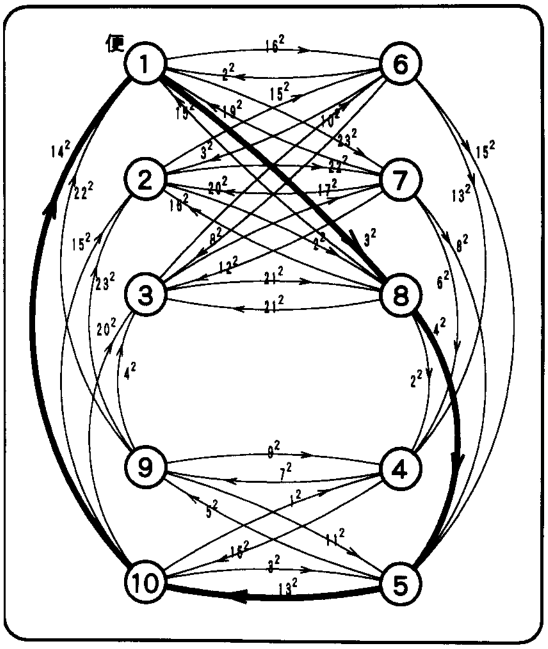

図14　機体の許容な運航（ネットワーク上）

教師：その飛行機の空港使用料はどうなりますか？

山田：①→⑧のとき3時間滞留で3^2，次に⑧→⑤のとき4時間滞留で4^2だから……．アッ，そうか．ループ上の枝の重みを足せばいいんだ．

教師：山田君のいうように，1機の飛行機の運航は，ネットワークの上で1本のループに対応します．その飛行機の空港使用料は，ループを構成している枝の重みの合計（例では$3^2+4^2+13^2+14^2$）に比例します．

ということは，『枝の重みの合計が小さくなるようにループを作ればいい』ということだね．

高橋：先生！　でも，それじゃ，まだ全部の便を飛んでいませんよ．⑥や②の便はどうなってしまうんですか？

教師：さすが，高橋君！　よく気がつきましたね．

仮にダイヤ上で，別な飛行機が⑥→②→⑥と飛んだとしよう．これも，ネットワークの上で⑥→②→⑥のループになっていますね．

高橋：先生！　わかりました．ネットワーク上で，全部の頂点（便）を何本かのループで覆えばいいですね．

教師：ハイ．結局，総費用を最小にする問題が，図12のネットワーク上で，

(a)　全部の頂点を覆う

(b)　枝の重みの合計が最小

となるように，何本かのループを選ぶ問題に置き換えられたわけです．

これもモデルの一種ですね．前回は『数学モデル』でしたが，今回のはネットワークを利用しているから，『ネットワーク・モデル』だね．

13．『ループ』とは？

教師：さてさて，モデル化しただけではダメだね．そのモデルを有効活用して，本来の問題を解決しなければORにならない．

さっきから「ループ，ループ」っていっていたけど，『ループ』って何だろう？　どんな性質をもっていると，ループになるんだろう？　佐藤君，どう思いますか？

佐藤：グルっとひと回りする『輪っか』のことでしょう．

教師：そうなんだけど，『輪っか』って何ですか？

佐藤：元に戻るように矢印を集めたもの．

教師：かなりいい線ですね．じっは，次の2つの条件

(a)　各頂点に入る枝がちょうど1本

(b)　各頂点から出る枝もちょうど1本

を満たす枝の集合をループ（専門用語ではサイクル）っていうんだ．ちょっと難しかったかな？　まあ，今日のところはそうだと信じてください．

ということで，総費用を最小にするために，『各頂点ごとに入る枝と出る枝を1本ずつ選び，選んだ枝の重みの合計が最小になる』ように，枝の集合を決めることにしよう．

佐藤：かえって難しくてわかんない．

教師：まあ，そういわずに……．もう少し我慢して．

佐藤君！　各頂点から出る枝は，飛行機の話に戻すと，何に対応しますか？

佐藤：『頂点』が『便』に対応するから，出る枝は……．

教師：たとえば，図14で頂点①から出ている①→⑧の枝は？

佐藤：そうか！　到着便①を⑧便で出発させることだ．

教師：そうですね．図13のダイヤを観ると，①便は（飛行機の胴体を2つに分けられないので），次に⑥⑦⑧のいずれかの便として出発するはずですから，頂点①から出る枝は必ず1本です．わかりましたか？

佐藤：ハイ．逆に，頂点①に入る枝は『出発便①にどの便で到着した機体を使うか』の意味ですね．ということは，ダイヤの上では⑥⑦⑧⑨⑩便のどれか1つだから，頂点①に入る枝も，頂点⑥⑦⑧⑨⑩からの枝の

出発 j →

到着 i ↓	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
①						16^2	23^2	3^2		
②						15^2	22^2	2^2	∞	
③			∞			10^2	17^2	21^2		
④							∞		7^2	15^2
⑤									5^2	13^2
⑥	2^2	3^2	8^2	13^2	15^2					
⑦	19^2	20^2	12^2	6^2	8^2					
⑧	15^2	16^2	21^2	2^2	4^2			∞		
⑨	22^2	23^2	4^2	9^2	11^2					
⑩	14^2	15^2	20^2	1^2	3^2					

図15　行列モデル

出発 j →
到着 i ↓

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
①						16^2	23^2	3^2		
②						15^2	22^2	2^2	∞	
③			∞			10^2	17^2	21^2		
④									7^2	15^2
⑤							∞		5^2	13^2
⑥	2^2	3^2	8^2	13^2	15^2					
⑦	19^2	20^2	12^2	6^2	8^2					
⑧	15^2	16^2	21^2	2^2	4^2			∞		
⑨	22^2	23^2	4^2	9^2	11^2					
⑩	14^2	15^2	20^2	1^2	3^2					

図16 最小費用の割り当て

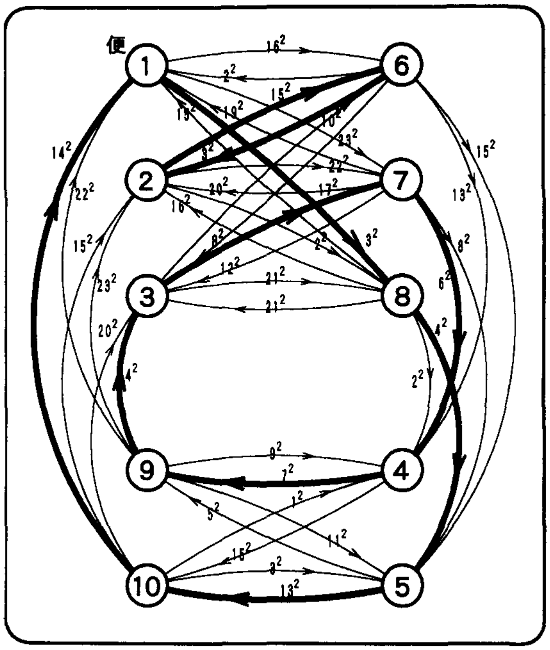

図17 最小費用の運航計画（ネットワーク上）

どれか１本ということですか．よくわかりました！

14. 行列モデル

教師：ここまで話を進めてくると，さらに別なモデルを作ることができます．

図15のような表，すなわち，『行列』を作ってみよう．行に到着便，列に出発便を採る．そうすると，i行j列は，『i便で到着した飛行機をj便として出発させる』ことに対応するので，i行j列の要素c_{ij}に

c_{ij}：到着便iを出発便jとして
使うときの滞留時間の２乗

を書く．ただし，空港が違って，到着便iを出発便jとして使えないときは，滞留時間が無限にかかるものと考えて，$c_{ij}=\infty$と約束する．

先ほど，図14のネットワーク上で，『各頂点ごとに出る枝と入る枝がちょうど１本』ということを議論したけど，それは，図15の行列の上では，どんなことに対応するんだろうか？　高橋君！　どうですか？

高橋：簡単ですね．『頂点ごとに出る枝が１本』ということは，飛行機の話に戻して考えれば，『到着便の機体を使って，次に出発可能な便を１つ選ぶ』ことだから，行列では『行ごとに１つのc_{ij}を選ぶ』ことに対応します．

一方，『頂点ごとに入る枝が１本』ということは，飛行機では『出発便の機体に使用できる到着便を１つ選ぶ』ことだから，行列では『列ごとに１つのC_{ij}を選ぶ』ことに対応します．

教師：高橋君には完全に見抜かれてしまっていますね．

そうすると，高橋君！　図15の行列で，『行ごとに１つの要素を選ぶ』かつ『列ごとに１つの要素を選ぶ』ようにして，なおかつ，選ばれた要素の総和を最小にしてやれば，どうなりますか？

高橋：c_{ij}が滞留時間の２乗だから，到着便と出発便を，お互いにダブらないように巧く組み合わせて，総費用を最小化することに対応します．

教師：他の皆もわかったかな？　図15の行列は，問(2)の総費用最小化問題に対して，１つの『数学モデル』になっているんだ．

15. 割当問題

教師：今，上で話をした『行列モデル』，すなわち，$n\times n$の正方行列$C=[c_{ij}]$が与えられたとき，

(a)　各行からちょうど１つ

(b)　各列からちょうど１つ

となるように要素c_{ij}を選び，その総和を最小にする問題は，『割当問題（assignment problem）』と呼ばれ，ORの分野で昔から研究されている問題なんだ．効率のいい解法も知られている．詳しいことは，また，別な機会に話すことにして，この割当問題を数式を用いて表現してみよう．

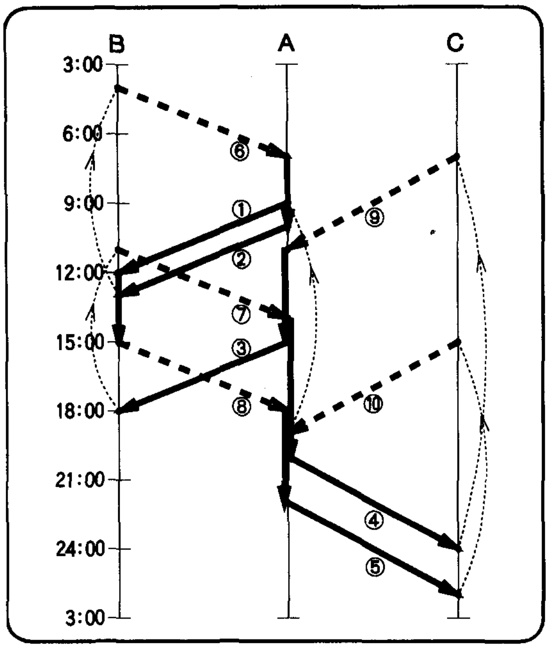

図18　最小費用の運航計画（ダイヤグラム上）

出発 j →　到着 i ↓

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
①						16	23	3		
②						15	22	2	∞	
③			∞			10	17	21		
④							∞		7	15
⑤									5	13
⑥	2	3	8	13	15					
⑦	19	20	12	6	8					
⑧	15	16	21	2	4			∞		
⑨	22	23	4	9	11					
⑩	14	15	20	1	3					

図19　最小機数の割り当て

まず，決定すべきことは『どの要素c_{ij}を選ぶか』ということだから，決定変数として，0−1変数

(21)　$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{要素}c_{ij}\text{を選択するとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$

を導入する．このとき，上の割当問題は

(22)　min　$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$

(23)　subject to　$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ i=1,2\cdots,n$

(24)　$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\ j=1,2\cdots,n$

(25)　$x_{ij}\in\{0,1\},\ i,j=1,2\cdots,n$

と定式化できます．これも『数学モデル』の1つです．

この割当問題の最適解を求めると，図16の行列で○印を付した箇所が$x_{ij}=1$，何も印がない箇所が$x_{ij}=0$です．すなわち，○印を付した行列の要素c_{ij}を選ぶのが，割当問題の最適解です．

となると，山田君！　総費用を最小にする運航計画はどうなりますか？

山田：エーと．$x_{18}=1$だから，到着便①を出発便⑧に割り当てて．次に，$x_{26}=1$だから，到着便②を出発便⑥に割り当ててと…….

教師：ちゃんとわかっているようですね．もう少し丁寧に説明すると，$c_{1,8}$が○印だから$x_{18}=1$となり，これは図12のネットワークで①→⑧の枝を通ることになります．ダイヤの上では，到着便①を次にB空港を出発する⑧便として使うことに対応します．つづいて，⑧便の続きを先に調べてしまいましょう．図16の8行目で$c_{8,5}$が○印だから⑧便は次に⑤便に使って，さらに$c_{5,10}$が○印だから⑩便に使って，$c_{10,1}$が○印だから①便に使って，これで元に戻りました．結局，①→⑧→⑤→⑩→①となって，これが1つのループ分です．

2つ目のループは，まだ②便が飛んでいませんので，行列の2行目に注目しましょう．$c_{2,6}$が○印だから②便は次に⑥便に使って，$c_{6,2}$が○印だから直ちに②便に戻って，これが2つ目のループ②→⑥→②です．

3つ目のループは，③便に注目すると，図16から③→⑦→④→⑨→③となります．

すべての便について調べ終わったので，これをネットワークとダイヤの上に描いてみると，それぞれ**図17**と**図18**になります．これが，総費用が最小となる運航計画です．ダイヤを観てみるとわかるように，これは前回FIFOルールで求めた運航計画と一致しています．そのとき，総費用は，図16で○印の付いたc_{ij}の合計$3^2+15^2+17^2+7^2+13^2+3^2+6^2+4^2+4^2+14^2=1{,}014$に比例することになります．

16. 終わりに

教師：どう，みんな，わかったかな？

こんなふうに，最小費用の運航計画を求める問題は，ダイヤグラムの上でも，ネットワークの上でも，行列

の形でもとらえることができるんだ.『利用できるモデルは1つとは限らない』ことに注意してほしいな.

ORでは，複雑な現象を簡単な数学モデルで表現し，モデルの上で解決策を見つけたり，解決策の妥当性を評価することが多いんです.ORをうまく使いこなせるかどうかは，モデルの善し悪しで決まってしまうんだ.

中村：先生！でも，総費用を最小にするならば，FIFOルールでよかったはずですよね．何でわざわざ，ネットワーク・モデルや割当問題なんか，難しいモデルを使う必要があるんですか？

教師：すごく的を射た質問だね．確かに，演習課題に出した問題を解くだけならば，高橋君が見つけてくれたFIFOルールが最適で，前回説明した簡単な『数学モデル』を利用するだけで，FIFOの最適性が証明できる.しかも,今日,説明したように,『FIFOルール(LIFOルール）の最適性は，在庫費用が凸関数（凹関数）の場合まで拡張できる』こともわかった.

でも，それが使えるのは，在庫費用が凸関数とか，凹関数とか，偶然にうまい性質をもっている場合だけですよね.

もっと現実に近い状況を考えてみてください．物の値段とか費用というのは，多くの場合もっと複雑で，たとえば郵便料金や鉄道運賃などのように，階段関数になることもありますね．しかも，料金が急に高くなる境目が等間隔とは限らなかったり，上がる料金の幅も一定でなかったりします.

こんなふうに，在庫費用（空港使用料）がもっと複雑な場合,FIFOのようなうまいルールが見つかるとは限りません．その場合でも，ネットワーク・モデルや行列モデルは，数値が与えられれば，割当問題の解法を利用して最適な在庫計画（運航計画）が求められます．その意味で，後者のモデルは難しいけど，『汎用性があるモデル』ということになります.

再度，運航に必要な最小の機数を求める問(1)を考えてみましょう．各飛行機iは，飛行中か空港に滞留中かのいずれかですから，1日当たり

(26)　　$(i\text{機の飛行時間})+(i\text{機の滞留時間})=24$

です．よって，JAN航空の手持ちの機数をnとし，式(26)の両辺を各飛行機について加え合わせると，

(27)　　$\sum_i(i\text{機の飛行時間})+\sum_i(i\text{機の滞留時間})=24n$

となる．左辺の第1項はJAN航空全体の総飛行時間ですから，ダイヤが与えられた時点で決まる定数です．したがって，機数nを最小にするには，左辺の第2項の総滞留時間を最小にすればいいわけです.

いま，図15の行列モデルで要素c_{ij}の値（図12のネットワークでは枝の重み）を$c_{ij}=(\text{滞留時間})^2$ではなく，$c_{ij}=(\text{滞留時間})$にすれば，最小機数を決める問題も行列モデルやネットワーク・モデルとして捉えることができます．そう考えて，割当問題を解いた結果が図19です．もちろんダイヤの上に表わしてみると，5機の運航計画になっています.

このように，ネットワーク・モデルや行列モデルは，問(1)の最小機数問題と問(2)の最小費用問題の両者に，同時に適用できる『汎用モデル』なんです.

簡単なモデルはよいモデルです．また，汎用性の高いモデルもいいモデルです．往々にして，この2つは両立しないことが多い．両者がうまくバランスしたモデルを見つけることが,ORを使う人に要求されていることなんです.

本稿で扱った題材は，日科技連のOR演習部会［1］の教材として用いられていたものです．筆者自身は，10年以上にわたり，東工大，埼玉大，東海大，豊橋技科大，筑波夜間大学院などで，OR教育を担当するたびに用いてきた．大勢の学生とのやりとりの中でさまざまな角度から議論され，今日の形になっている．とにかく，学生たちが「ついついハマって徹夜した」とボヤクほど，学生たちが夢中になって取り組んでくれる点で，初期のOR教育の目的は十分達せられている.

参考文献

［1］ OR演習部会編「OR演習問題集」，日科技連.

［2］ 横山勝義編「輸送・運搬におけるOR技法」，培風館.