

Tabu Searchアルゴリズムの 組合せ最適化問題への適用

藤沢 克樹

(早稲田大学理工学部工業経営学科 現所属：同大学院理工学研究科)

指導教官 森戸 晋教授

1. 研究目的

組合せ最適化問題の中でNP-hardな問題は、規模が大きくなると全列挙などの最適解法が事実上不可能になるので、効率的な近似解法が古くから研究されている。その中でTabu Search [1, 2] は汎用的で、効率的な探索技法として最近注目を集めている。

本研究ではNP-hardな組合せ最適化問題の中から、グラフ分割問題 (GPP) と最も難しい問題の1つとされる2次割当問題 (QAP) にTabu Searchを適用し、その有効性について実験、考察する。

2. Tabu Search

組合せ最適化問題 $\min\{c(x) \mid x \in X\}$ (ここで $c: X \rightarrow \mathbb{R}$ は費用関数を表わす写像, X は実行可能解の集合) に対して近傍を以下のように定義する。

$$N: X \rightarrow 2^X$$

近傍 N の中で費用関数を減少させる解が存在しない時、その解を局所最適解と呼び、その中で費用関数値が最も少ない解を大域最適解と呼ぶ。Tabu SearchはGlover [1], [2] によって提案され、近傍 N から最も費用関数値の減少が少ない解に移行していくとともに、局所最適解から脱出するためにTabu Listを用いて一度移行した解には、一定回数以上移行しないように制限するアルゴリズムである。

3. グラフ分割問題 (GPP)

無向グラフ $G = (V, E)$ (V は点, E は枝の集合) が与えられた時、枝 $(i, j) \in E$ 上には、非負の重み c_{ij} が存在するものとして、それを費用と呼ぶことにする。また $|V|$ は偶数で、 $n = |V|$ と仮定する。この時、点集合 V の分割とは、点集合の対 (L, R) で表わされ、 $L \cap R = \emptyset$, $L \cup R = V$ として、それぞれ L は左点集合, R は右点集合と呼ぶことにする。特にGPPの目的は、これ

らの条件が与えられたとき、費用関数 $c(L, R) = \sum_{i \in L, j \in R} c_{ij}$ を最小にするような分割 (L, R) を見つけることにある。なお今回の実験では、 $|L| = |R| = n/2$, $c_{ij} = 0, 1$ とする。

4. 2次割当問題 (QAP)

$V = \{1, \dots, n\}$ と $n \times n$ の対称行列 $F = (f_{ij})$ と $D = (d_{kl})$ が与えられたとき、次の費用関数を最小化する順列 $\pi: V \rightarrow \{1, \dots, n\}$ を求めることである。

$$C(\pi) = \sum_i \sum_j f_{ij} d_{\pi(i)\pi(j)}$$

この問題は次のように解釈される。求める順列 π は n 個の対象物の n 箇所への配置を示していて、 f_{ij} は対象物 i と j の間の流量, d_{kl} は場所 k と l の間の距離を示している。よって実際に問題を解くにあたっては、 $0-1$ 変数 x を使用し、対象物 i が j に位置するとき $x_{ij} = 1$ とするとQAPは次のような整数計画問題になる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l f_{ij} d_{kl} x_{ik} x_{jl} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{ij} = 1 \quad i \in V \\ & \sum_i x_{ji} = 1 \quad i \in V \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in V, j \in V, i \neq j \end{aligned}$$

5. Tabu Searchアルゴリズムの適用

Johnson et al. [3] がSimulated Annealing (Tabu Searchと並ぶ効率的な探索技法であり、確率的要素を用いて、局所最適解からの脱出をはかる方法) をGPPに適用しているのので、同じデータを用いてTabu SearchとSimulated Annealingとの比較実験を行なう。またQAPは、Skorin-Kapov [4] と同じデータを用いてTabu Search同士でSkorin-Kapovとは異なる近傍も用いて比較実験を行なう。プログラムはSPARC Station IPX上で、C言語を用いて作成した。またTabu ListにはGPPでは異なる点集合に移動した点番号、QAPでは交換した対象物の番号が入る。

5.1 Tabu List検索の高速化

Tabu Listは本来 (Glover [1, 2] キュー構造をしており、その長さを n とすると検索に要する計算量は $O(n)$ になる。これに対してGPPでは n (=点数)個の要素からなる配列を用意して異なる。点集合に移動した点番号に対応する配列要素に整数(パラメータ)を代入して以後1ずつ減らしていくようにする。これによってTabu Listに入っているかどうかは、配列に入っている数が正かどうかを調べれば良いのでその計算量は $O(1)$ で済むようになる。

5.2 近傍の定義: GPP

1. L から R へ移動したときに、最も費用関数を減少させる点を L から R へ移動する。

2.1で R に移動した以外の R の点の中で、 L へ移動したときに、最も費用関数を減少させる点を、 R から L へ移動する。

5.3 近傍の定義: QAP

すべての2つの対象物の組合せを調べ、それらの位置を交換したときに最も費用関数を減少させるものを選択する(Exchange)。Skorin Kapovの近傍との違いは、3つの対象物の交換の組合せ(3-Exchange)も、Exchange近傍で一定回数以上費用関数の値が更新されない場合に採用しているところにある(Skorin-KapovはExchangeのみ)。

5.4 長期Listの採用

Tabu Listとの違いはListの中身が実験全体を通して保持されることと、近傍への移行を禁止するのではなく、評価関数(現在の解と近傍との費用関数の差)

表1 Random Graphにおける実験結果

n	Expected Average Degree				Algorithm
	2.5	5.0	10.0	20.0	
124	0.0	0.4	0.1	0.2	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu
250	1.8	0.6	0.3	0.0	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu
500	12.2	1.3	0.3	0.2	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu
1000	3.2	1.3	0.5	0.2	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu

表2 Geometric Graphにおける実験結果

n	Expected Average Degree				Algorithm
	5	10	20	40	
500	543.0	70.6	11.3	15.5	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu
1000	3285.0	137.2	15.7	7.2	Annealing
	0.0	0.0	0.0	0.0	Tabu

に負荷を掛け、1回移行したことがある解へ再び移行しにくくして長期的な巡回を防ぐのが目的である。

6. 数値実験結果と考察

表1, 2の横軸は点から出ている枝の平均本数を示しており、値は表1, 2, 3ともに最良解より何パーセント悪いかを示している。Tabu Searchはすべてのグラフに関して最良解に達しているのに対し、Simulated Annealingは特に幾何構造をもったGeometric Graphで値、実行時間(本論文を参照)ともにTabu Searchよりもいちじるしく劣っている。点数の大きいグラフやGeometric Graphでは長期Listが非常に有効な手段である。また表3では、括弧の中の数値は繰り返し回数(Exchange)を示していて、Skorin-Kapovと同じExchange近傍の採用だけでなく、3-Exchange近傍も採用することで、Skorin-Kapovと比較して値において同等以上、繰り返し回数はかなり少なくなっている。基本的にExchange近傍を採用し、局所最適解から脱出できないときに3-Exchange近傍を採用するのが有効であると思われる。

表3 QAPにおける実験結果

n	実験結果	Skorin-Kapov
42	0.0 (4391)	0.0 (57691)
49	0.0 (3094)	0.0 (71801)
56	0.0 (14735)	0.0 (105345)
64	0.0 (10097)	0.0 (121489)
72	0.0 (13038 + 2)*	0.0 (198129)
81	0.0 (16509)	0.0 (191571)
90	0.0 (25091 + 2)*	0.4 (268416)

*は(Exchange + 3-Exchange)の繰り返し回数。

References

- [1] F. Glover. Tabu search I. *ORSA Journal on Computing*, 1: 190-206, 1989.
- [2] F. Glover. Tabu search II. *ORSA Journal on Computing*, 2: 4-32, 1989.
- [3] D. S. Johnson, C. R. Aragon, L. A. McGeoch, and C. Schevon. Optimization by simulated annealing: an experimental evaluation, part I, graph partitioning. *Operations Research*, 37: 865-892, 1989.
- [4] J. Skorin-Kapov. Tabu search applied to the quadratic assignment problem. *ORSA Journal on Computing*, 2: 33-45, 1990.