解説

選挙制度の数理

―― 小選挙区制と比例代表制の問題点 ――

大山　達雄

1．はじめに

わが国の政界における昨今の状況としては，与野党を問わずほとんどすべての政治家が「政治改革」を唱えているといっても過言ではないであろう．「政治改革」が叫ばれて久しいが，これだけ大きな声がありつつ前宮沢内閣においても解決に至ることなく，未だに見通しが明確でないということは「政治改革」という問題が言うは易く実行することがいかに難しいかを反映しているといえよう．政治改革の中核をなすのが，わが国の衆議院，参議院においてどのような選挙制度を採用すべきかというういわゆる選挙制度改革論議である．これまで小選挙区制，比例代表制，これらを折衷しようとする並立制，併用制，連用制あるいはこれらに何らかの修正を加えた統合制，死票救済のための改訂案など非常に数多くの選挙制度が各政党，委員会，調査会などから提起され，綿密な検討がなされてきている．しかしながらこれらの検討案に対しても，各政党の思惑が交錯し，賛否両論が入り乱れるため，国会の場でも未だ解決には至っていない．

これまでに提起された，あるいはいずれかの国において採用されたどのような選挙制度を採用するにしても，大きな政党に有利である，小さな政党に有利である，死票が多すぎる，等々必ず何らかの問題点が提起され，それに伴ってお互いの利害関係が対立することになり，解決が困難となるというパターンが繰り返されている．本稿では，わが国においてもこれまで選挙制度議論の中心となっている小選挙区制，比例代表制について，その数理的側面に注目し，それぞれの制度の特徴と問題点についての解説を加える．最後に各国の選挙制度について，概要と問題点を紹介する．

おおやま　たつお
埼玉大学大学院政策科学研究所
〒338 浦和市下大久保255

2．小選挙区制の数理

小選挙区制はそれぞれの選挙区において最高得票を得た1人を当選者とする最も単純な選挙制度である．諸外国においてはsingle member electoral systemなどと呼ばれているが，1つの選挙区において最高得票を得た1人を当選者とすることから，非常に少ない得票数で当選となる場合もあるため，いわゆる死票が多いのが欠点といわれている．またこの制度のもう1つの欠点としてよく言われるのがコンドルセ・パラドクス（Condorcet paradox）と呼ばれるものである．有権者総数21万人を有する選挙区において，x，y，zの3人の候補者に対する選好順序とそれぞれのグループに属する有権者数が**表1**のように与えられているとする．このとき小選挙区制によると，x，y，zの各候補者を最も選好する有権者数はそれぞれ8万人，7万人，6万人となるので，xが当選することになる．一方，候補者yより候補者xを選好する有権者数を$P(x>y)$，候補者zより候補者yを選好する有権者数を$P(y>z)$などのように表わすと，$P(y>x)=4+3+4>4+4+2=P(x>y)$，$P(y>z)=4+3+4>4+2+4=P(z>y)$なる関係を有する．すなわち候補者$y$を選好する有権者数は$x$，$z$のいずれを選好する有権者数よりも多いので，候補者$y$を当選としなければならない．こ

表1　選好順序と有権者数

選好順序	ケース1	ケース2	一般ケース
$x>y>z$	4	6	w_1
$x>z>y$	4	2	w_2
$y>x>z$	3	2	w_3
$y>z>x$	4	5	w_4
$z>x>y$	2	4	w_5
$z>y>x$	4	2	w_6
合　計	21	21	W

のようにして小選挙区制が矛盾した結果を与えることがわかる．

さて３人の候補者の選好順序とそれぞれのグループに属する有権者数が表１のケース２のように与えられたとする．このとき小選挙区制によれば，x，y，zの各候補者を最も選好する有権者数はそれぞれ８万人，７万人，６万人となるので，やはりxが当選することになる．一方，それぞれの２人に対する選好関係に関しては，以下の関係が成立する．

$P(x>y)>P(y>x)$，$P(z>x)>P(z>x)$，$P(y>z)>P(z>y)$

すなわちyよりxが選好され，xよりzが選好され，さらにzよりyが選好される．このような状態をx，y，z間の選好順序に関する循環状態と呼ぶことにする．一般にx, y, zのうちの１人が他の２人よりも選好されるための必要十分条件は，表１の一般ケースの表現を用いて以下のように与えられる．

(i)xがy，zよりも選好される場合

$$(1)\qquad \begin{cases} w_1+w_2+w_5>w_3+w_4+w_6 \\ w_1+w_2+w_5>w_3+w_4+w_6 \end{cases}$$

(ii)yがz，xよりも選好される場合

$$(2)\qquad \begin{cases} w_3+w_4+w_6>w_1+w_2+w_5 \\ w_1+w_3+w_4>w_2+w_5+w_6 \end{cases}$$

(iii)zがx，yよりも選好される場合

$$(3)\qquad \begin{cases} w_4+w_5+w_6>w_1+w_2+w_3 \\ w_2+w_5+w_6>w_1+w_3+w_4 \end{cases}$$

したがってx, y, zの３人の候補者の間に循環状態が生じないための必要十分条件は，上の(1)，(2)，(3)のうちのいずれかが成立することである．

一般にm人の候補者の集合を$\{X_1, \cdots, X_m\}$と表わすとき，ある候補者X_tが他のいずれの候補者よりも選好されるための必要十分条件を考えてみよう．m人の候補者の間には$m!(=n)$通りの順序が存在する．それらの各順序$i\in N=\{1, \cdots, n\}$に対応する有権者数をw_iと表わす．ある候補者X_k，$k\in M=\{1, \cdots, m\}$，が何番目に選考されるかを表わす順位をp_kとするとき，$n(=m!)$通りの順序の集合のうち$p_k=s$となるような選好順序集合を$\{p_k=s\}$，候補者X_kの順位が候補者X_lの順位より上位にあるような選好順序の集合を$\{p_k>p_l\}$などと表わす．さらにそれぞれの順序集合に含まれる順序に対応する有権者数の総和を$w(\{p_k=s\})=\Sigma_{i\in\{pk=s\}}w_i$，$w(\{p_k>p_l\})=\Sigma_{i\in\{pk>pl\}}w_i$などと表わすことにする．このとき，次の定理が得られる．

定理　ある選挙区にm人の候補者X_1，…，X_mがいる場合，ある候補者X_tが他のいずれの候補者よりも選好されるための必要十分条件は，以下の関係が成立することである．

$$(4)\qquad w(\{p_t=1\})+\sum_{k\in M, k\neq t,j} w(\{p_k=1\}\cap\{p_t>p_j\})>$$
$$w(\{p_t=1\})+\sum_{k\in M, k\neq t,j} w(\{p_k=1\}\cap\{p_t>p_j\})$$
$$\text{for all } j\in M,\ j\neq t$$

証明　候補者X_tが候補者X_jよりも選好されるための条件を考える．$n(=m!)$通りの選好順序の集合のうちで，X_tがX_jよりも上位にあるものの集合をX_tが１位の場合とそれ以外の候補者X_kが１位になる場合とに分けると，前者は$\{p_k=1\}$，後者は$\{p_k=1\}\cap\{p_t>p_j\}$のように表わすことができる．したがってX_tがX_jよりも上位にある場合の有権者数はこれらをすべてのX_k，$k\neq t$，jについて加えることによって，次のように表わすことができる．

$$(5)\qquad w(\{p_t=1\})+\sum_{k\in M, k\neq t,j} w(\{p_k=1\}\cap\{p_t>p_j\})$$

一方，候補者X_jが候補者X_tよりも上位にある場合の有権者数も，上と同様にしてX_tが１位の場合とそれ以外の候補者X_kが１位になる場合とに分け，これらの有権者数の総和をとることによって次のように表わすことができる．

$$(6)\qquad w(\{p_j=1\})+\sum_{k\in M, k\neq t,j} w(\{p_k=1\}\cap\{p_j>p_t\})$$

したがってX_tがX_jよりも選好されるためには式(5)が式(6)より大きくなればよい．この関係がすべての$j\in M$，$j\neq t$について成立することが候補者X_tが他のどの候補者X_jよりも選好されるための必要十分条件となるので，式(4)の関係が得られる．

小選挙区制において１位となった候補者は前述の表１のケース１の例からもわかるように必ずしも他のどの候補者よりも最も選好されるとは限らない．上の定理は小選挙区制において１位となった候補者が他のどの候補者よりも選好されるための必要十分条件を与えるとも解釈することができる．

さてm人の候補者X_1，…X_mがいる場合，ある候補者が他のいずれの候補者よりも選好されるということとm人の候補者の間の循環状態が生じるということとの関係をみよう．まずm人の候補者の集合$S=\{X_1, \cdots X_m\}$にもとづいて有向グラフ$G=(V, E)$を頂点集合$V=\{i \mid X_i\in S,\ i=1, \cdots m\}$，枝集合$E=\{(i, j) \mid X_i$が$X_j$より選好される$\}$のように定義する．ここで候補者$X_i$が$X_j$より選好されるということは，それぞれの候補者がより選好される有権者数を用いて，$w(\{p_i>p_j\})>w(\{p_i\leq p_j\})$のように表わすことが

できる．このようにして得られるグラフは，任意の2頂点i, jに対して $(i,j)\in E$であるかまたは $(j,i)\in E$であるから，トーナメントグラフとなる（Grimaldi ['89]など参照）．m個の頂点からなるトーナメントグラフは必ずm-1本の枝からなる有向経路を持つ（1934年にL. Redeiによって与えられたといわれる．Grimaldi ['89, p.451] 参照）から，この経路に沿って選好順序が存在することになる．しかしながらこのことは，s, $s\leq m$, 個の頂点の間に有向閉路が存在することを否定するものではない．いまこのグラフに含まれる最大人数の候補者からなる循環状態がs人であるとする．循環状態が存在しないとすると$s=0$, すべての候補者からなる循環状態が存在する場合は$s=m$となる．

3．比例代表制の数理

比例代表制はそれぞれの政党の得票率に応じて議席を与える方法である．いまA, B, C, D, Eの5政党が得票率としてそれぞれ39.8%, 29.2%, 12.4%, 10.7%, 7.9%を得たとき，総議席数が100の場合A, B, C, D, Eの各政党に得票率に応じてたとえば40, 29, 12, 11, 8の議席を与えるというのが比例代表制である．さて問題はこの議席の配分の仕方であって，いろいろな配分方法がそれぞれ異なる配分解を与えるといっても過言ではない．

一般に政党数がn, それぞれの政党$i\in N=\{1,\cdots,n\}$の得票数をp_i, そして総議席数をKとする．このときそれぞれの政党$i\in N$の割当分q_iは，総得票数を$P=\Sigma_{i\in N}p_i$とすると，次のように与えられる．

(7) $$q_i=\frac{p_i}{P} \qquad i\in N$$

最大剰余数法と呼ばれる配分方法では，まずすべての政党$i\in N=\{1,2,\cdots,n\}$にそれぞれ$\lfloor q_i\rfloor$（q_iを越えない最大整数）議席を与える．総議席数がKであることから，あと$K-\Sigma_{i\in N}\lfloor q_i\rfloor$議席だけの追加配分をする必要がある．そこで，$q_i-\lfloor q_i\rfloor$, $i\in N$を大きい順に並べ，上位から$K-\Sigma_{i\in N}\lfloor q_i\rfloor$個の政党に1つずつ議席数を追加する．最大剰余数法の場合と同様の初期配分に対して，$q_i-\lfloor q_i\rfloor$ではなく，$\frac{q_i-\lfloor q_i\rfloor}{p_i}$の大きさの順に同様の追加配分を行なうという方法は修正最大剰余数法と呼ばれる．修正最大剰余数法では評価基準$\frac{q_i-\lfloor q_i\rfloor}{p_i}$において$0\leq q_i-\lfloor q_i\rfloor<1$であることから，通常の最大剰余数法と比べて有権者数p_iのより少ない政党に有利である．

1議席がどれだけの得票数を“代表”すべきかという量（除数と呼び，以下λと表わす）にもとづいて各政党の議席数を決定する方法を除数法と総称する．除数法の中で最もよく用いられている最大除数法は1792年に米国のT. Jeffersonによって採用されたことからジェファーソン法とも呼ばれている．またヨーロッパでは，その最初の提案者とされている19世紀のベルギーの数学者の名前をとってドント（d'Hondt）法と呼ばれている．1議席が“代表”する得票数をλ（必ずしも整数とは限らない）とするとき，各政党iの議席数を$\lfloor\frac{P_i}{\lambda_c}\rfloor$と与えることにすると，政党数が$n$で総議席数が$K$の場合

(8) $$\sum_{i\in N}\lfloor\frac{P_i}{\lambda}\rfloor\geq K$$

を満たすような最大のλが存在する．このようなλをλ_Cと書くと，$\frac{P_i}{\lambda_C}$, $i=1,\cdots,N$の中にはちょうど整数値になるものが存在する．というのは，λをλ_Cより少しでも大きくすれば(8)が満たされなくなるので，そのときいずれかのiに対して$\frac{P_i}{\lambda_C}$が変化することになるからである．そこで$\frac{P_i}{\lambda_C}$の値が整数値となるような政党iの集合を$E=\{i\mid\frac{P_i}{\lambda_C}:\text{整数}\}$とおくとき，$K'=\Sigma_{i\in N}\lfloor\frac{P_i}{\lambda_C}\rfloor=K$ならば，上述のごとく議席数を

(9) $$d_i=\lfloor\frac{P_i}{\lambda_C}\rfloor \qquad i\in N$$

と定めればよい．$K'>K$の場合には$|E|-1$個の政党から1名ずつを減らせばよい．

最大除数法に次いでよく用いられている過半小数法は1832年にD. Websterによって最初に提案されたことから米国ではウェブスター法と呼ばれている．またヨーロッパではサント-ラゲ（Sainte-Lagues）法と呼ばれ，特にデンマーク，ノルウェーでは現在でも実際の議席数配分に用いられている．過半小数法の基本的な構造は，前述の最大除数法とほぼ同様である．すなわち最大除数法では$\frac{P_i}{\lambda}$を越えない最大整数$\lfloor\frac{P_i}{\lambda}\rfloor$を採用するのに対して，過半小数法では$\frac{P_i}{\lambda}$を四捨五入した整数値$\lfloor\frac{P_i}{\lambda}+0.5\rfloor$を用いる点が主な相違点である．

議席数配分方法としての除数法の手順は一般に以下のような形に表わすことができる．まず除数関数$v(d)$, ただし$d\leq v(d)\leq d+1$, を与え，得票数pを除数関数$v(d)$で除して得られる階数関数$r(p,d)$を次のように定める．

(10) $$r(p,d)=\frac{p}{v(d)}$$

総議席数がkのときの政党iの配分議席数を$d(k,i)$と表わすと，われわれの求める$d(K,i)$, $i\in N$を決定する手順は以下のように書くことができる．

<u>除数法の計算手順</u>

<u>Step 1.</u> $d(k,i)=0$, $k\in\{0,1,\cdots K\}$, $i\in N$.
$k=0$

Step 2．

(11) $\qquad r(p_t, d_t)=\max_{i\in N}\ r(p_i, d_i)$

なる添字tを求める．

(12) $\qquad \begin{cases} d(k+1, t)=d(k, t)+1 \\ d(k+1, i)=d(k, i)\ i\neq t, \quad i\in N \end{cases}$

Step 3． $k+1\rightarrow k$．もし$k=K$ならば，終了．そうでなければ，Step 2へ行く．

上のアルゴリズムは，Step 2の手続きからもわかるように，除数関数がたとえば政党の現在の配分議席数を表わす場合には，議員1人当たりの得票数の最も多い政党に次の議席を配分する操作を繰り返すことを意味している．除数法は除数関数$v(d)$の与え方によって異なった配分を与える．これまでにも諸外国でよく用いられている最も代表的な除数法を除数関数，階数関数とともに**表2**に示す．表2に示した6つの除数法がどのような得票数分布と総議席数のデータに対してもほぼ同様の配分解を与えてくれれば問題はないのであるが，実はこれらの配分方法はデータによってはことごとく異なる配分解を与える（大山［'87b］など参照）．さらにこれらの配分方法はそれぞれ異なる特性を有することから，いずれの配分方法がより望ましいかを明確にすることは非常に困難となる．これが議席配分問題が難しいことの1つの理由である．

除数法の1つの一般的な形を提示したものとしてパラメトリック除数法がある．パラメトリック除数法の除数関数は次式のように与えられる．

(13) $\qquad v(d, t)=d+t \qquad 0\leq t\leq 1, \ t$：パラメタ

表2　各種除数法の除数関数と階数関数

分配方法	除数関数	階級関数
最大除数法	$d+1$	$\frac{p}{d+1}$
過半小数法	$d+\frac{1}{2}$	$\frac{p}{d+\frac{1}{2}}$
等比率法	$\sqrt{d(d+1)}$	$\frac{p}{\sqrt{d(d+1)}}$
調和平均法	$\frac{d(d+1)}{d+\frac{1}{2}}$	$\frac{p(d+\frac{1}{2})}{d(d+1)}$
最小除数法	d	$\frac{p}{d}$
パラメトリック除数法	$d+t$	$\frac{p}{d+t}$

式(13)においてパラメタtの値を変えることによって，パラメトリック除数法はさまざまな除数法となりうる．たとえば$t=1$は最大除数法，$t=\frac{1}{2}$は過半小数法，そして$t=0$は最小除数法に対応する．パラメトリック除数法は除数法の有する性質を備えていることに加えて，パラメタを調整することによって除数法としての特性を変えることができるという柔軟性を有する点が特徴である．Oyama［'91］では，パラメタtの値として$0.46\leq t\leq 0.48$あたりが“公平さ”の観点から適当であるとしている．

A，B，C，D，E，Fの各政党得票数がそれぞれ$p_A=5551$，$p_B=3359$，$p_C=963$，$p_D=51$，$p_E=41$，$p_F=34$，したがって$n=6$，$P=10000$，そして$K=100$の例に上述の議席配分方法を適用した配分結果を表3に示す．この場合の最大除数法と過半小数法に対する除数はそれぞれ$\lambda_G=\frac{5551}{57}$，$\lambda_M=\frac{6718}{67}$となる．またパラメトリック除数法においては，パラメタtの値として$0.46\leq t\leq 0.48$に対して得られる同一の配分解を示す．表2に示した代表的な議席配分方法についての導出の経緯，理論的な関連等については，たとえばLucas［'83］，Balinski-Young［'79，'82］などを参照されたい．

4．各国の選挙制度

小選挙区制を採用している国としてはイギリス，オーストラリア，カナダ，フランス，アメリカ，インド，ニュージーランドなどがあるが，これらの国々の間でも小選挙区制はそれぞれ少しずつ異なっている．中でも最も古い歴史を有しているのはイギリスであって，下院では人口約85000人につき1選挙区として，全国を650選挙区に分けている．わが国において現在検討されている小選挙区制は選挙区数250程度であるから，人口約40万人につき1選挙区となり，イギリスの場合に比較してかなり大きくなる．またフランスでは，前述のコンドルセ・パラドクスを避けるための1つの方法として，第1回投票で有効投票の過半数をとれば当選となるが，そうでない場合に第1回投票で有効投票の$\frac{1}{8}$の得票があれば第2回投票にも立候補できるという条件で第2回目の投票を行なう．アメリカの場合は上院が各州2名という同一の議員定数であるのに対して，下院においては人口に比例して議員定数を配分している．1790年センサス実施後の議会において下院議席総数112という法案が可決され，その後これを各州に配分することに関しては，政治家，研究者によって多くの配分方法が議論され，下院議席総数の増加ととも

表3　政党得票数と分配議席数

政党	得票数	LF法	GD法	MF法	EP法	HM法	SD法	PD法
A	5551	56	57	55	55	55	54	55
B	3359	34	34	34	33	33	33	34
C	963	10	9	10	9	9	10	10
D	51	0	0	1	1	1	1	1
E	41	0	0	0	1	1	1	0
F	34	0	0	0	0	1	1	0
合計	10000	100	100	100	100	100	100	100

LF法：最大剰余数法，GD法：最大除数法，MF法：過半小数法
EP法：等比率法，HM法：調和平均法，SD法：最小除数法
PD法：パラメトリック除数法

に幾多の変遷を経てきている(Lucas['83]，Balinski-Young ['82]，渡辺 ['89] など参照)．現在の下院議席総数435は1930年に設定されたもので，1950年にアラスカ，ハワイが新しく州に加入したときに一時的に2議席増となった以外は固定されている．また議席の各州への配分方法については，1941年に過半小数法から等比率法に変更され，現在に至っている．

比例代表制を採用しているのはドイツ，イタリア，ベルギー，オランダ，スイス，オーストリア，スウェーデン，デンマーク，ノルウェーなどのヨーロッパの国々が主体である．ドイツの連邦議会の議員定数は496であるが，その半分の248の小選挙区が作られており，有権者は小選挙区の候補者1人と1つの政党を選ぶ．小選挙区では最高の得票を得た候補者が当選となるが，政党に対する投票は全国の投票を総計して最大剰余数法（1987年以前はドント法）によって各党に配分する．各党に配分された議席をその党の各州の得票によって再び最大剰余数法によって配分する．このようにして各党の各州における当選者の数が決まるが，ここで小選挙区の当選者を優先的に当選とし，残りを各州の各党の拘束名簿から補充する．小選挙区の当選者数がその党の割当よりも多い場合には，小選挙区の当選者を優先的に当選とするため超過議席として扱い，次の選挙まで議員定数を増やすことになる．わが国ではこの方法を小選挙区比例代表併用制と呼んでいるが，各党の議席数は実質的に比例代表制によって決定される．なお政党に対する全国の投票を総計して各党に配分する際，全国で5％以上の得票を得たものを対象とするのは1つの特徴である．

オーストリア，イタリアではまず各選挙区に何らかの方法で各党ごとに議席を配分し，次に残りの定数を配分に貢献しなかった分と死票にもとづいて再配分するという2段階配分方法を用いている．スウェーデン，デンマークでは全国で4％以上の得票のあった政党に対して過半小数法を適用する．スイス，ベルギー，オランダでは有権者は各選挙区の定数と同数の候補者に投票することができる．各党は候補者ごとの得票を総計し，所属政党別の得票として算出して各党にドント法にもとづいて配分する．配分された議席は候補者ごとの得票順に与えられる．比例代表制において候補者の顔が見えないという1つの欠点を補った方法といえる．

選挙制度の問題は平等とは何か，公平とは何か，不偏的であるとはどういうことか，などの非常に難しい問題をそれ自体に含んでおり，完全に解決するにはもっと時間が必要かも知れない．これまで約200年もの間多くの研究者によって積極的に研究され，かなりの成果が得られている．今後ともますます多くの若い研究者がこの問題に興味を持ち，解決に少しでも近づけることを期待したい．

参考文献

[1]　大山達雄，1987a．“選挙区議員定数問題の数理”，オペレーションズ・リサーチ，Vol.32，No.5，pp. 269-280.
[2]　大山達雄，1987b．“選挙区事例からみた議員

定数配分方法の比較分析", オペレーションズ・リサーチ, Vol.32, No.8, pp. 551-561.

[3] 大山達雄, 1989. "議員定数配分問題", オペレーションズ・リサーチ, Vol.34, No.7, pp. 302-304.

[4] 西平重喜, 1990. 日本の選挙・世界の選挙, 講談社.

[5] 渡辺重範 (編著), 1989. 選挙と議席配分の制度, 成文堂.

[6] Balinski, M. L. and H. P. Young, 1979. "Criteria for proportional representation", *Operations Research*, 27, pp. 80-95.

[7] Balinski, M. L. and H. P. Young, 1982. *Fair Representation : Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, Yale University Press.

[8] Grimaldi, R. P., 1989. *Discrete and combinatorial mathematics : an applied introduction*, second edition, Addison Wesley.

[9] Lucas, W. F. 1983. "The apportionment problem", *Modules in Applied Mathematics*, Chapter 14, Lucas, W. F. (ed.), Vol.2, Springer-Verlag, pp.358-396.

[10] Oyama, T. 1991. "On a parametric divisor method for the apportionment problem", *Journal of Operations Research Society of Japan*, Vol.34, No.2, pp.187-221.