

空港での飛行機発着スケジューリング

— その1 —

鈴木 久敏

「大学や企業で初心者向けにORの魅力や有用性をどんな教材や方法を用いて教育をしているか」を書いて欲しいとの依頼を受け、私が授業で用いている演習問題と、学生とのやりとりを誌上で紹介したい。

1. 演習問題

教師：今日の授業はこれで終わりですが、宿題があります。来週までに次の演習問題を考えてきてください。来週の授業の最初にレポートを提出してもらいます。いいですね。

〔問題〕 JAN航空会社は、毎日A, B, Cの3空港を以下に示す時刻表で運行している。

便番号	出発空港	出発時刻	到着空港	到着時刻
①	A	9:00	B	12:00
②	A	10:00	B	13:00
③	A	15:00	B	18:00
④	A	20:00	C	24:00
⑤	A	22:00	C	2:00
⑥	B	4:00	A	7:00
⑦	B	11:00	A	14:00
⑧	B	15:00	A	18:00
⑨	C	7:00	A	11:00
⑩	C	15:00	A	19:00

- (1) この時刻表通りに運行するのに飛行機は何機必要か？
- (2) 着陸1回当たりの空港使用料が滞留時間の2乗に比例するとき、空港使用料の総額を最小にするには、飛行機をどのように運行したらよいか？

*OR演習部会編「OR演習問題集」日科技連より採録

すずき ひさとし

筑波大学 大学院経営システム科学

〒112 文京区大塚3-29-1

学生：何枚ぐらい書いてくればいいんですか？

教師：何枚でもOK。好きなだけ。1枚でも10枚でも。レポートについて他の学生と議論するのは大いに結構ですが、まとめるときは自分なりに、他人が気がつかないような独創的な回答を期待しています。

2. 運行に必要な最小の機数は？

教師：先週の宿題のレポートを出してください。いろんな答えがありますね。4機、5機、6機、…。

ホウ、佐藤君は2機ですか？ 佐藤君！ 君の考え方を簡単に説明してくれるかな？

佐藤：1機の飛行機をできるだけたくさん、到着後できるだけ早く出発させるように飛ばせばいいと思ったんです。時刻表から①の飛行機は12:00にB空港に到着するから、12:00以降にB空港を出発する最も早い便を探すと⑧だから、次に⑧として使う。⑧はA空港に18:00到着だから、次は④に使ってC空港へ。さらに翌朝C空港を発つ⑨に使って、という具合に次々に考えてゆくと、①→⑧→④→⑨→③→⑥→①となって元に戻ります。これが飛行機1機分で、飛び終わった①、⑧、④、⑨、③、⑥を表から除き、残りの便の中から適当に②を選んで同様に考えると、②→⑦→⑤→⑩→②となって元に戻る。これで全部の便を飛び終わったので、結局、飛行機は2機で運行可能。できるだけ早く出発したんだから、空港使用料も最小になっているはずなんですけど。

教師：議論を簡単にするために、最初は問(1)の「運行に必要な最小の機数」に話を絞って考えてみよう。『空港使用料の最小化』は後で考えることにしよう。

他の人は佐藤君の考え方をどう思う？

高橋：③と⑧を1機で飛ぶことは不可能です。だって、16:00には③がAからBに向かって飛行中だし、⑧が逆にBからAに飛行中ですから。

教師：それじゃ、高橋君は何機必要だと思うのですか？

高橋：他にも①と⑨、あるいは②と⑦が、同時刻に別

なところを飛行中ですから、最低6機は必要な。

中村：最低何機必要かはよくわかりませんが、5機あれば全部を運行できます。

教師：どうしてですか？ 中村さん！

中村：私は時刻表のデータを図1のように書き直してみたんです。こうするとすぐわかるんですが、すべて

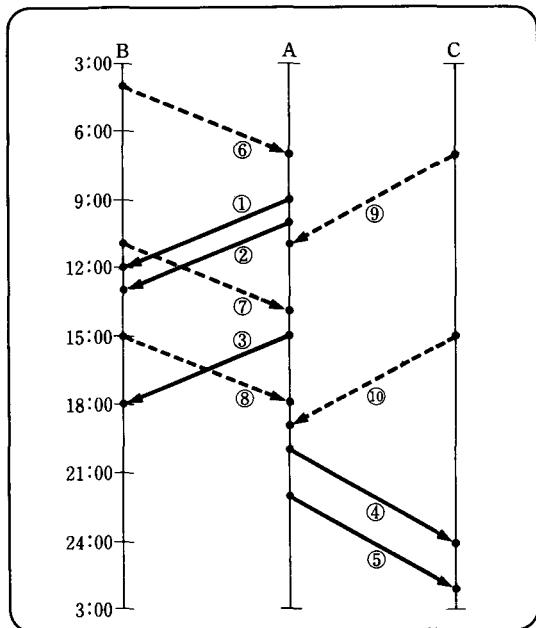


図1 JAN航空のダイヤグラム

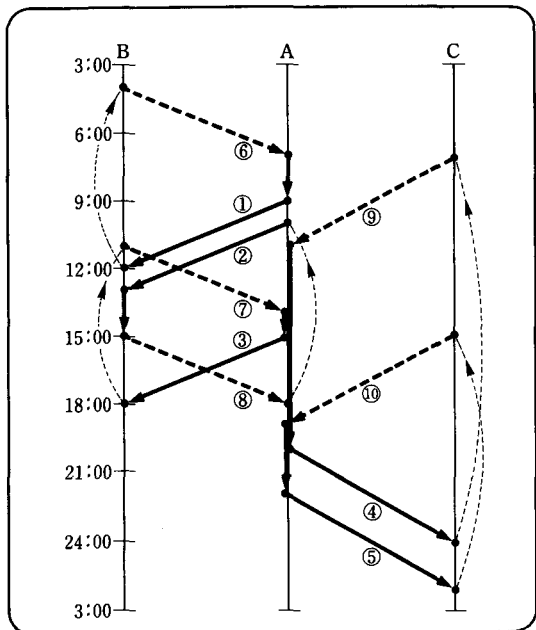


図2 5機の運行計画

の便はAB間か、あるいはAC間を飛んでいるんです。それで両空港の間を往復するように運行計画を立ててみると、図2のようにAB間が⑥と①、⑦と③、②と⑧の3組で合計3機が必要、AC間は⑨と④、⑩と⑤の2組で合計2機が必要となります。ですから5機あれば足りると思います。

高橋：さっき僕が主張した『同時刻に別な地点を飛行中の便を1機で賄うことはできない』というのは、この図を見るとすぐ言えますね。③と⑧とか…。

山田：僕も中村さんと同じような図を考えました。ただ時間軸を横に採りました。僕は鉄道マニアだから、時間軸を横に採ると図1は車掌さんが持っている列車ダイヤと同じなんです。それで、図1のダイヤを早朝から丁寧にみてゆくと、9:30頃には①と⑨の2便が飛行中、10:30頃になると①、②、⑨の3便が飛行中であることがわかります。こうやって飛行中の機数が最大になる時刻を探すと、ちょうど11:00直後には①、②が飛行中で、⑨がA空港到着直後、⑦がB空港出発直後だから、結局、合計4機必要なことがわかります。

教師：かなり核心に近づいてきましたね。確かに山田君の言うように最低4機は必要ですね。でも山田君！

『4機でこのダイヤが運行可能』と言えますか？ 一方、中村さんは『5機あればこのダイヤを運行可能』であることを示してくれましたが、本当に5機必要なのかどうかは説明してくれていません。命題の証明で言えば、山田君は必要条件を示し、中村さんが十分条件を見つけてくれたことになります。正解は4機か5機のどちらかなのですが、どちらが必要十分条件ですか？

高橋：うまく言えないんだけど、やっぱり5機必要なんじゃないかな。山田君の言うように11:00の①、②、⑦、⑨に使った4機に注目しながら、それ以後のA空港の発着をみてゆくと、14:00に⑦が到着し、15:00に③が発発する。③には⑦か⑨を使って、さらに次の⑧に①か②を使うとしても、結局、⑩に使う予定の飛行機がC空港に別に必要になるんじゃないかな？ ⑨を⑩の出発時刻までにC空港に回送しない限り、

教師：高橋君の言うとおりだ。回送を考えると問題が複雑になるから、今日のところは『回送なし』という前提で考えることにしよう。そうすると、問(1)の正解は最低5機必要で、5機あれば十分ということだね。

3. 図を活用しよう

教師：ここで、2つのことに気がついてほしいんだ。

(a) みんなで知恵を出し合うことが大切

(b) うまい図を書くと効果的

どう、宿題を解いてみて実感できたかな？

上の(a)はORに限らないわけですが、いろんな発想、いろんな立場の人がいると、思いがけないヒントが得られるということだ。昔の人はうまいことを言ったものだ。『3人寄れば文殊の知恵』とね。

次に、(b)はORの常套手段の1つだ。時刻表のまだと全体の様子がよく見えてこない。ところが図に描いてみると、各空港の発着や全体の様子がよく見えてくる。しかも、『何が問題か』について他人と共通の理解を持てるので、議論の中身が深まり、よりよい結論に早くたどりつけることが多いんだ。複雑な問題、難しい問題であればあるほど、文章や表ではなく、『図に描いてみる』ことが重要なんだ。

高橋：先生！ 僕も図を描いてみたんですけど、図3でも11:00に4機必要で、さらに⑩のためにもう1機必要なことがわかりますよ。

教師：ウン、高橋君の図もわかりやすいですね。専門用語では、図3を『ガントチャート』、図1を『ダイアグラム』と言うんだ。山田君が言っていた列車ダイヤの『ダイヤ』は、もともとこの『ダイアグラム』を省

略した言葉なんだ。図1と図3を比較してみると、どちらも各時刻にどの便が、全部でいくつ飛行中なのかをうまく表現している。ところが図3のガントチャートだと、各空港での発着の様子が、いま1つよくわからない。その点で、この宿題の場合はダイアグラムのほうが、問題の現状をうまく表わしていることになります。

4. 汎用性が重要

教師：さて、実際の航空会社の場合を考えると、1日の飛行便数も、発着空港数もずっと多いよね。そのような大規模な場合でも君たちの方法が使えるかな？

飛行中の機数が最大になる時刻を見つける方法は、全部のダイヤを一目で見通せないと使えないですね。便数や空港数が増えたら大変な作業ですよ。コンピュータを使えば何とかなるだろうけど、それでも⑩のためにもう1機必要と判定するのは、コンピュータでも難しい。また、中村さんのような方法で運行可能な運行計画を1つ見つけたとしても、今回は最小数の5機が『偶然』見つかりましたが、いつも最小機数の運行計画になるとは限りません。その場合は、今回の議論だけでは正解が得られなくなるわけです。

ORでは、単に与えられた数値例の問題の答えを求めただけでは不十分なのです。ORは答えよりも、答えを求めるまでの考え方が重要なのです。別な数値が与えられた場合でも、問題の規模が大きくなっても、『汎用的』に使える考え方を見つける必要があります。

誰か別な考え方がありますか？

佐藤：先生！ 高橋君の話からすると、C空港の15:00に飛行機が一番足らなくなるんですよね。そのときでもC空港に飛行機があればいいんじゃないですか？

教師：うまいとこに気がついたね。話が出たところで、C空港に注目してみよう。早朝からC空港の発着、すなわち飛行機の出入りを調べてみるとどうなるのかな？ 横軸に時間を採り、C空港の駐機数をグラフに表わしてみよう。飛行機が到着したら1機増えるので+1、飛行機が出発したら1機減るので-1と数えてみる。ついでにA空港、B空港についても調べてみると、図4のグラフが得られます。

佐藤君！ 君の言いたいことは、この図の上でどういうことですか？

佐藤：ハイ。15:00にC空港の飛行機が一番少なくなるので、そのときでも飛行機が足りていれば…。アッ、そうか！ 図4のグラフが一番低くなったところで、

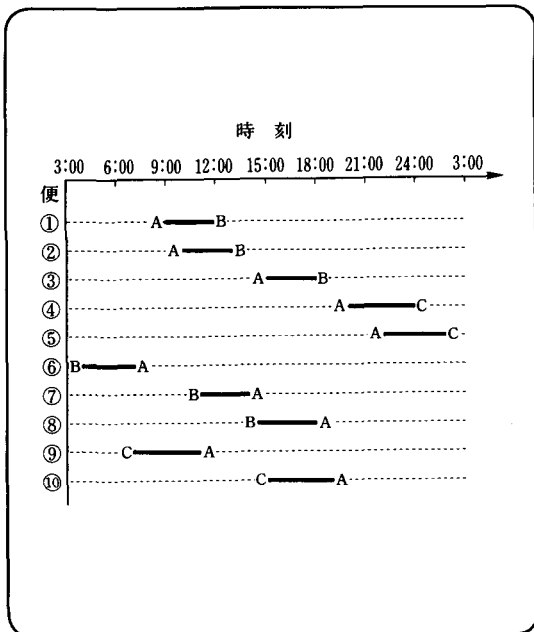


図3 ガントチャート

C空港の駐機数がちょうど0になればいいんだ。

教師：ということは、朝の3:00の時点でC空港に何機あればいいのかな？ 山田君！

山田：C空港に2機ですね。同じように考えると、3:00の時点でA空港に1機、B空港に2機。

教師：そう、その通り。3:00の時点で、A、B、C空港に1、2、2の合計5機あれば、どの空港でも、どの時刻でも、飛行機が足らなくなることはないから、JAN航空のダイヤはうまく運行できることになる。

教師：もし興味があったら、

(a) A空港13:00発、C空港17:00着の追加便がある場合、上の議論がどう変わるか？

(b) 回送を考えると、上の議論はどう変わるか？なども考えてみると面白いよ。

5. 飛行機も在庫

中村：何かまだ割り切れないんですが、C空港のことを考えるとき、他空港のことを無視してしまって…。

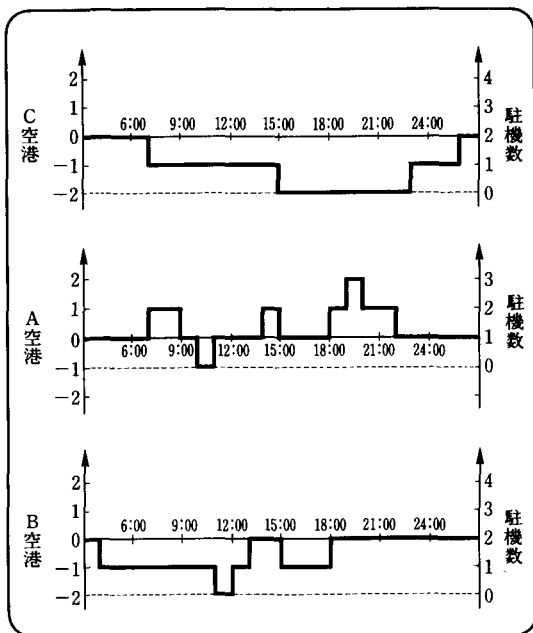


図4 空港別の駐機数のグラフ

空港ごとに別々に計算してもいいんですか？

教師：大丈夫！ 飛行機の機種がすべて同じで、空港の駐機スペースに上限がなければ。

君たちは図4のようなグラフを他で見たこと、習ったことはありませんか？ 山田君！ どうですか？

山田：鉄道では見たことないですね。

教師：何も鉄道である必要はないんだよ。山田君！

君は『在庫』って知ってるよね？

山田：はい、聞いたことがあります。

教師：商店の店頭に並んでいる商品（在庫）は売れると減り、メーカーから補充されると増える。このとき、在庫は図4のような動きをするね。お客様がきたときいつでも売れるためには、在庫が負にならないように維持しなければならない。これが在庫管理の基本だ。

上の例で、空港は毎日決まった時刻に『飛行機』という商品が1個ずつ売れて、決まった時刻に1個ずつ補充される商店だと思えばいいわけだ。A、B、Cの3つの商店(空港)で、朝3:00にそれぞれ1、2、2個の商品(飛行機)を準備しておけば、お客がきたとき(出発時刻)いつでも商品が売れる(出発可能)というわけだ。C商店にとって、隣のA、B商店で、いつ商品が売れ、いつ補充されても、自分のところの在庫には無関係だから、隣の商店とは独立に自分のところの在庫を管理すればよいことになる。『何時に到着した飛行機でも飛行機は飛行機。同じものだから、どの出発便にでも使える』という点がキーポイントだね。

学生の諸君は、航空会社の話だから交通関係の特別な問題と思ってしまったのだろうけど、『飛行機』を『商品』と思ってしまえば、空港での離発着も商店の在庫も、本質は同じ原理原則に従う現象なんだ。商品の在庫管理について学んだ知識は、飛行機の運行管理にも使える。『逆もまた真』なんだ。

こんなふうに発想を柔軟にして、問題の本質だけとりあげて、そこに流れる普遍的な原理原則を発見し、有用な結論を導くところが、ORの醍醐味なんだ。

では、便ごとに使う機種が指定されていて、別の機種が余っていても使えない場合は、どうしたらいいんだろう？ 難しくないから、後で考えてごらん。

6. シラミ潰し

教師：今度は、問(2)の『空港使用料の最小化』を考えてみよう。山田君！ 君のは分厚いレポートだけど、君の考え方を簡単に説明してくれるかな？

山田：先生！ この宿題たいへんだったんですよ。問題の意味もよくわからないし…。だいたい飛行機を5機に固定したまま空港使用料を最小にするのか、飛行機は増えてもよいから空港使用料を少なくすればいいのか？ それすら、問題に書いてないんだもの！ プツプツ。

昨日も一昨日も、友達と図書館に集まって考えたんですけど、みんないろんな意見があって…。

教師：まあ、講釈はいいから、君の考えを説明して。
 山田：佐藤君は『滞在時間を短くするために、可能な限り次に早い便に使う』と言っていました、僕はそれではダメだと思いました。たとえば、A空港を出発する③は、到着便の⑨か⑦のどちらかを使うのだと思いますが、⑦を③に使うと⑦の滞在時間は確かに短くなりますが、そのぶん⑨の滞在時間が延びてしまうから、結果として費用が増えてしまいそうです。だから、起り得るすべての可能性を調べ上げて、空港使用料が最小になる運行計画を見つける必要があります。
 教師：そういうふうに『シラミ潰し』に調べ上げると、B空港の場合、全部でいくつの組合せがあったかな？
 山田：到着便①、②、③を出発便⑥、⑦、⑧のどれかに割り当てるので、重複を除くと6通りです。
 教師：そう①、②、③の並べ方は全部で3！=6通りある。そして、仮に順列が③①②ならば並んだ順に⑥、⑦、⑧に使うことにする（③→⑥、①→⑦、②→⑧と割り当てる）。同様に考えると、A空港の場合は5！=120通り、C空港の場合は2！=2となる。
 山田：ハイ、だから計算が大変で、レポートをまとめるのに徹夜になりました。
 教師：それはそれはご苦労様。それで、最小費用の運行計画はどんな結果になりましたか？
 山田：図5が空港使用料最小の運行計画です。この運行計画に従えば、空港滞在時間の2乗和は1,014です。

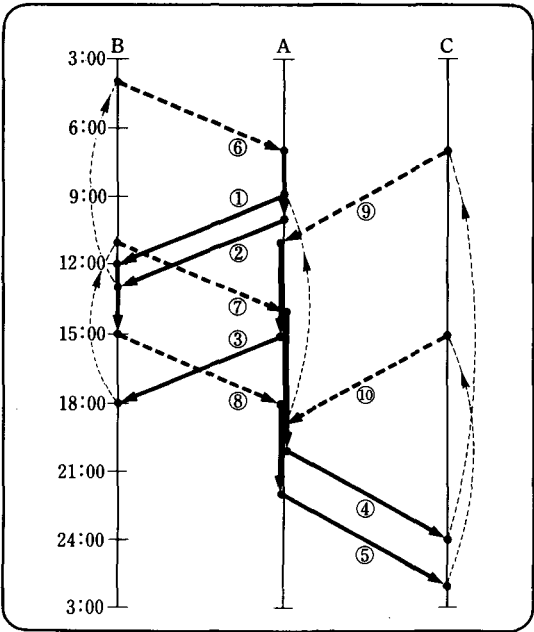


図5 空港使用料最小の運行計画

7. 数学モデルを使う

教師：高橋君はどう考えましたか？
 高橋：直感だけなのですが、空港に2機溜まっている場合、どうも『空港に早く到着して、長く待っている飛行機を早く出発させる』とよさそうなんです。
 たとえば、C空港の0：00からの1日分を考えると、24：00（すなわち0：00）に到着した④と2：00到着した⑤が、⑨あるいは⑩として出発することになります。同じ飛行機が⑨と⑩の両方を飛ぶことはできないから、④→⑨、⑤→⑩とするか、④→⑩かつ⑤→⑨とするか、どちらかになります。滞在時間を計算すると、

方策1		方策2	
割 当 て	滞 留 時 間	割 当 て	滞 留 時 間
④→⑨	7 時間	④→⑩	15時間
⑤→⑩	13時間	⑤→⑨	5 時間
2 乗 和	218時間 ²	2 乗 和	250時間 ²

です。先に到着した④を早く出発する⑨に使う方策1が、滞在時間の2乗和を小さくしています。他の場合もいくつか計算してみたんですが、いつもこの規則が成り立つんです。最終結果は山田君と同じ図5です。
 教師：素晴らしい直感だね。高橋君の言うとおりのんだ。彼が見つけた規則『先に到着したものを先に出す』を、専門用語で『先入先出』あるいはFirst-In-First-Outの頭文字を採って『FIFO』と言うんだ。逆に、『後から到着したものを先に出す』を、『後入先出』あるいはLast-In-First-Outの頭文字を採って『LIFO』と言うんだよ。

高橋君の直感は、『FIFOが滞在時間の2乗和を最小にする』という命題を示唆している。これを簡単な『数学モデル』を使って証明してみよう。

まず、図6のように空港に2機到着して、その後2機が出発する場合を考えてみよう。到着した2機①、②がFIFOで出発する場合（図6の左）と、LIFOで出発する場合（図6の右）を比較してみる。記号を

$$t_i^a : i(i=1,2) \text{ 番目の到着機の到着時刻}$$

$$t_i^d : i(i=1,2) \text{ 番目の出発機の到着時刻}$$

と約束する。このとき、FIFOかLIFOか悩む状況は

$$(1) \quad t_1^a < t_2^a \leq t_1^d < t_2^d$$

です。いま、FIFOの場合の滞在時間の2乗和を S_{FIFO} 、LIFOの場合の滞在時間の2乗和 S_{LIFO} とすると、

$$(2) \quad S_{\text{FIFO}} = (t_1^d - t_1^a)^2 + (t_2^d - t_2^a)^2$$

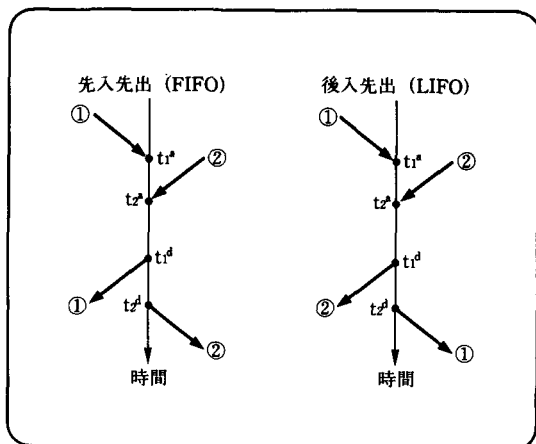


図6 FIFOの最適性(2機の場合)

$$(3) \quad S_{LIFO} = (t_2^d - t_1^d)^2 + (t_1^d - t_2^d)^2$$

です。式(1)~(3)より、

$$(4) \quad S_{FIFO} - S_{LIFO} = -2(t_2^d - t_1^d)(t_1^d - t_2^d) < 0$$

となる。したがって、2機の場合、FIFOは滞留時間の2乗和を最小にすることと同値です。

高橋君！ これでいいかな？

高橋：ハイ。ただ、証明は2機の場合だけですね。

教師：それでは、3機以上の場合にも上記の命題が成り立つことを示そう。

図7左のように、空港で複雑な到着／出発がある場合を考えてみよう。到着順に①、②、③、④と名前をつける。もしFIFOで出発させるならば、出発順も①②③④となるはずだ。仮にFIFOでない順序、たとえば図7左のように②④①③の順序で出発させたとする。

このとき、①と②は、到着順が①②なのに出发順が②①だから、FIFOでなくLIFOですね。③と④を固定

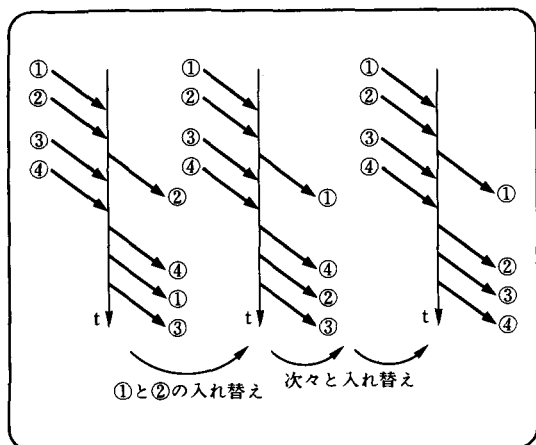


図7 FIFOの最適性(3機以上の場合)

したまま、①と②の出発順序を入れ替え、①と②に関してFIFOに変更する。2機の場合の議論から、明らかに図7左より図7中央の出発順の方が、滞留時間の2乗和が小さくなる。すなわち、『FIFOでないペアがあれば滞留時間の2乗和を減少可能(最小ではない)』です。この対偶は、『滞留時間の2乗和が最小ならばすべてのペアがFIFO(すなわち、全体として出発順がFIFO)』となるね。よって、FIFOが必要条件であることが示せた。一方、十分条件は、FIFOとなる出発順序が唯一つしか存在しないことから明らかですね。

図7のように、次々とFIFOでないペアを見つけ、出発順序を入れ替えていくと、入れ替えのたびに滞留時間の2乗和が減少する。最後には全体がFIFOの出発順序となり、滞留時間の2乗和が最小になっているんだ。

8. モデルは1つとは限らない

中村：先生！ 私も数式を用いて考えたのですが、私のも『数学モデル』といえるのですか？

教師：どんなふうに考えたのですか？

中村：私は、AC間を往復する便だけを考えました。まず、C空港については高橋君と途中までは同じなんです。私は、『方策1でも方策2でも、④と⑤の滞留時間の合計Tは同じ20時間だ』ということに気がついたんです。

いま、

T_4 ：④便のC空港での滞留時間

T_5 ：⑤便のC空港での滞留時間

とすると、

$$(5) \quad T_4 + T_5 = T (=20)$$

となります。ですから、この条件の下で滞留時間の2乗和

$$(6) \quad S = T_4^2 + T_5^2$$

を最小にするように、 T_4 、 T_5 を決めればよいと思います。

教師：イヤー、素晴らしい。2機の場合の完璧な『数学モデル』ですね。

中村さんの話をもう少し一般化し、 n 機の場合に拡張しましょう。いま、飛行機が n 機到着し、 n 機出発する場合を考えてみましょう。記号を

t_i^a ：飛行機 $i(i=1, \dots, n)$ の到着時刻

t_i^d ：飛行機 $i(i=1, \dots, n)$ の出発時刻

T_i ：飛行機 $i(i=1, \dots, n)$ の滞留時間

とすると、

$$(7) \quad T_i = t_i^d - t_i^a (\geq 0)$$

だから (t_i^q, t_i^q) は前章の定義と異なる),

$$(8) \quad \sum T_i = \sum t_i^q - \sum t_i^q \quad (\text{一定})$$

となります。注意して欲しいのは、右辺の各項が時刻表で指定された出発時刻の総和と到着時刻の総和ですから、飛行機の発着順序に無関係に、その差が一定となることです。すなわち、各空港ごとに全部の飛行機の滞留時間の総和は一定だということです。

この条件の下で、滞留時間の2乗和を最小にすればよいのですから、問題は次の数学モデル

$$(9) \quad \min \quad S = \sum_{i=1}^n T_i^2$$

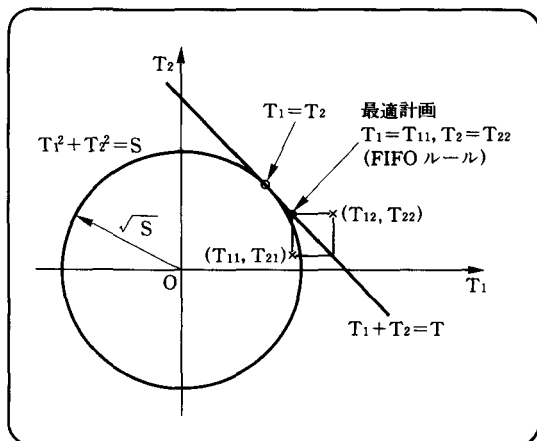


図8 $n=2$ の場合の凸2次計画

$$(10) \quad \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n T_i = T \quad (\text{一定})$$

$$(11) \quad T_i \geq 0$$

となります。

ちょうど $n=2$ の場合が中村さんの議論になります。中村さん！ 式(11)の非負条件も必要なのですよ。いいですね。これはORの中で凸2次計画(数値計画法の1つ)と呼ばれている『最適化モデル』です。

式(9)~(11)の最適化問題は、 $n=2$ の場合、図8のグラフから簡単に解けます。すなわち、第1象限でかつ直線 $T_1 + T_2 = T$ 上の点 (T_1, T_2) で、円の半径 $\sqrt{S}$ を最小にする点を求めることになります。したがって、 $T_1 = T_2$ のとき滞留時間の2乗和が最小となります。

実際には T_1, T_2 を自由に変化させることは不可能で、 T_{ij} を i 番目の到着機が j 番目の出発機として出発するときの滞留時間とすると、さらに T_1, T_2 が

$$(12) \quad T_{11} \leq T_1 \leq T_{12}, \quad T_{21} \leq T_2 \leq T_{22}$$

を満たさなくてはならない。すなわち、 $T_1 = T_2$ は実現できないけれども、図8から $T_1 = T_{11}, T_2 = T_{22}$ の場合が滞留時間の総和が最小となる。これはFIFOルールを意味しています。

一般の n 機の場合は、この議論を n 次元空間で考えればよいわけです。

時間ですので、つづきは次回にお話ししましょう。