転置行列である．また，集合分割問題の実行可能解集合の凸包の2つの端点が隣接しているという必要十分条件は2部グラフGが接続していることである[1]．この性質を用いて，グラフGが連結でなければ，Gの連結成分をすべて求めることにより，極大単調端点列を求めることができる．

4. おわりに

本研究では，単調多面体という凸多面体のクラスを定義した．そして，単調多面体の性質を，主にその端点間の隣接関係を中心に示した．また，単調多面体の性質を利用した局所探索手続きを提案した．提案した局所探索手続きは，ある特定の解法や問題に依存しないためかなり広範囲な適用が可能である．さらに，提案した局所探索手続きが集合分割問題に対して容易に適用可能であることも示した．

参考文献

[1] E. Balas and M. Padberg, "Set Partitioning : A Survey," *SIAM Review*, 18(4)(1976) 710—761.

学生論文賞受賞論文　　要約

On Eigenvalues of the Rate Matrix in a PH／PH／c Queue

高野　正次

（東京工業大学大学院理工学研究科情報科学専攻　現所属：NTT）

指導教官　高橋幸雄教授

1. はじめに

到着間隔分布やサービス時間分布が相型分布（PH）であるようなPH/PH/c型待ち行列システムにおいて，その定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ は，いわゆる matrix-geometric form をもつことが知られている．すなわち，$\boldsymbol{\pi}_n$ をその待ち行列システム内にn人の客がいる定常確率ベクトルの部分ベクトルとすると，公比行列と呼ばれるある非負行列Rが存在して，

$$\boldsymbol{\pi}_n=\boldsymbol{\pi}_c R^{n-c} \quad (n\geq c) \tag{1}$$

という関係が成り立つ．このことは，定常状態確率ベクトルが無限次元であるにもかかわらず，有限個の有限次元ベクトル $\{\boldsymbol{\pi}_0,\cdots,\boldsymbol{\pi}_c\}$ と行列Rにより，完全に決定されることを示している．したがって，公比行列Rは定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ に対して非常に重要な情報を含んでいる．この重要性のために，Rを実際に数値的に求める計算の手続きがいくつか提案されている．しかし，現実的な問題として，この手続きが有効に働くのは，Rの次元が比較的小さいときに限定されてしまう．というのは，Rは

$$R^2A+RB+C=0 \tag{2}$$

という非線形行列方程式の非負最小解として求めなければならないからである．ここで，行列A，B，Cは推移速度行列の小行列である（次節参照）．

そこで，待ち行列システムの定常的挙動を解析しようとする立場からは，Rを実際に計算することなく，Rの重要な特性を引き出すことができることが望ましい．Rの絶対値最大固有値，つまり，ペロン・フロベニウス固有値は，到着間隔分布とサービス時間分布のラプラス変換を含む代数方程式の解として与えられることが知られており，上の立場での最も重要な成果となっている．そして，ペロン・フロベニウス固有値に対応する固有ベクトルは，$c+1$個のベクトルのクロネッカー積として与えられる．$\boldsymbol{\pi}$ が，matrix-geometric form をもつことからすぐにわかることであるが，$\boldsymbol{\pi}_n$ の漸近的挙動は，Rの比較的に絶対値の大きい固有値が支配している．このことが，$\boldsymbol{\pi}$ の裾の近似的数値計算の高速化や評価を可能にしている．

本研究は，上のようなRのペロン・フロベニウス固有値に関する結果を，Rのすべての固有値に対して拡張することを意図したものである．

2. 準　備

ここで扱うシステムは，窓口ごとにサービス時間分布が異なる場合も許す PH/PH/c 型待ち行列システムである．ただし，到着間隔分布 $T=\mathrm{PH}\ (\boldsymbol{\alpha}_0,\ \boldsymbol{Q}_0)$ とすべ

てのサービス時間分布 $S_i=\mathrm{PH}\ (\boldsymbol{a}_i,\ \boldsymbol{Q}_i)\quad (i=1,\cdots,c)$ は原点において質量をもたないものとする．また，各分布についてラプラス変換のかわりに，ラプラス変換を全複素平面上に解析接続させた関数 T^*，S_i^*（ただし，極では定義しない）を用いて議論を進めていく．

このシステムに対応するマルコフ連鎖を支配する推移速度行列Gは，三重ブロック対角構造

$$G=\begin{pmatrix} B_0 & C_0 & & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & A_{c-1} & B_{c-1} & C_{c-1} & & \\ & & & A_c & B & C & \\ & & & & A & B & C \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3}$$

をもつ．ただし，部分行列A，B，Cは，到着間隔分布およびサービス時間分布を表現する行列とベクトルのクロネッカー積や和であらわされる正方行列で，その次元は，$\boldsymbol{Q}_i$ の次元を s_i としたとき，$s_0\ s_1\cdots s_c$ である．

3. 公比行列 R の固有値

まず，システムが複数の窓口をもつとき，公比行列Rが固有値として0をもち，その多重度は $(s_0-1)\ s_1\cdots s_c$ であることを示した（§3.1）．公比行列 R が，非零固有値 η をもつと仮定すると，(2)式を用いて，対応する固有ベクトルは，行列

$$\boldsymbol{Q}_0(I-\frac{1}{\eta}\boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_0)\oplus\boldsymbol{Q}_1(I-\eta\boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Q}_c(I-\eta\boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_c) \tag{4}$$

の固有値0に対応する固有ベクトルであることが示される．ここで，$\oplus$はクロネッカー和をあらわす．このとき，

（Ｉ）$\boldsymbol{Q}_0(I-1/\eta\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_0)$，$\boldsymbol{Q}_i(I-\eta\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_i)$

のすべての固有値が固有多項式の単根である．

（Ⅱ）$\boldsymbol{Q}_0$ と $\boldsymbol{Q}_0(I-1/\eta\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_0)$ が共通の固有値をもたず，$\boldsymbol{Q}_i$ と $\boldsymbol{Q}_i(I-\eta\ \boldsymbol{e}\boldsymbol{a}_i)$ も共通の固有値をもたない．

という条件の下で，次の lemma が成り立つ（§3.2）．

Lemma 3.7

公比行列Rの非零固有値ηが条件（Ｉ）と（Ⅱ）を満たすならば，ある複素数の集合 $\{\xi_0,\ \xi_1,\cdots,\xi_c\}$ が存在し，次の方程式を満たす．

$$\left.\begin{aligned} &T^*\ (\xi_0)\ =\eta, \\ &S_i^*\ (\xi_i)\ =1/\eta,\ i=1,\ \cdots,c, \\ &\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_c=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$\boldsymbol{R}$ の固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}$ は，

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{a}_i\ (\eta I-\boldsymbol{Q}_i)^{-1},\ i=0,1,\cdots,c$$

とすると，

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0\otimes\boldsymbol{u}_i\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{u}_c$$

とあらわすことができる．ただし，$\otimes$はクロネッカー積をあらわす．

(5)式をηと $\xi_0\ \xi_1,\cdots,\xi_c$ についての連立方程式と考えれば，この方程式を解くことによって，Rのすべての固有値の候補が求められることになる．

さらに，§3.3では，$|\eta|<1$ であるような(5)の方程式系の解の集合が，公比行列Rの非零固有値の集合と多重度を含めて一致するための十分条件を考察した（Theorem 3.10）．この条件は，一見，非常に強い条件であるようにみえるが，$E_k/E_r/c$ 型待ち行列システムの公比行列Rに対しては，実際に適用が可能である（§3.4）．したがって，このような場合には公比行列Rを計算により求めることなく，(5)の方程式系を解くことによって，固有値と固有ベクトルを完全に求めることができる．

4. 陽な条件へ

Lemma 3.7の応用を考える上で，条件（Ｉ）と（Ⅱ）が成り立つかどうかを知ることが大切である．しかし，これは一般には簡単ではない．そこで，この条件を別の条件によって置き換えることを考える．別の条件とは，到着間隔分布とサービス時間分布が，条件（Ｉ）と（Ⅱ）に相当する性質をもつための十分条件であり，その意味で陽な条件への置き換えであると考えることができる．

まず，(4)式の小行列の固有値を求めるために特性多項式を解いた（§4.1）．次に，O'Cinneide にならってＰＨ分布の表現について，いくつかの概念を定義し，上の固有値の代数的多重度と幾何的多重度について考察した（§4.2）．

これらをふまえ，ＰＨ分布のある部分集合を定義し，Feedback PH 分布（FPH 分布）と名づけた．FPH 分布のクラスは，アーラン分布や超指数分布をはじめ，通常用いられる主なＰＨ分布のほとんどすべてを含み，しかもそれらはいくつかのよい性質をもつ．たとえば，(4)式の小行列の固有値の幾何的多重度は，代数的多重度にかかわらず，いつも１である．このことを用いると，その固有値に対応する固有ベクトルはもちろん，すべての根ベクトルを求めることができる（§4.3）．したがって，ＦＰＨ／ＦＰＨ／c 型待ち行列システムについては，Lemma 3.7と同様の方程式系が条件なしに成り立つことが示される（§4.4）．

なお，詳しい条件および結果については，本論文を参照していただきたい．