性を考察した．その結果，MVモデルを実際に適用するためには，過去の実現収益率にもとづく標本平均をあてにせず，(1)あらかじめ，すべての銘柄の平均収益率を等しいものと見なして投資する（分散最小化戦略）か，(2)市場の平均的パフォーマンスに比べたミーン・リバージョンを積極的に利用し，やや低めの標本収益率ベースの収益率を狙う（逆張り戦略）必要がある．ただし，(1)(2)の投資戦略を利用するにあたっては，次の工夫が求められる．

(1)分散最小化ポートフォリオにおいては，基本推定期間を適切（約6年間）に設定する必要がある．

(2)逆張り戦略においては，基本推定期間は過去のデータをフルに利用できるものの，λを適切（約−500)に設定する必要がある．

参考文献

［1］ Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, "*Modern Portfolio Theory And Investment Analysis*", John Wiley & Sons, New York, 1987.

［2］ Harry M.Markowitz, "Portfolio Selection." *Journal of Finance*, March 1952, pp.77—91.

［3］ 白川 浩，『標本統計量に基づくマーコビッツ効率的ポートフォリオの漸近的性質と事前・事後分析』，日本応用数理学会，平成4年度年会予稿集，pp.271—272, 1993.

［4］ James M. Poterba, Lawrence H. Summers, "Mean Reversion in Stock Prices, …Evidence and Implications…", *Journal of Financial Economics* 22(1988), pp.27—59, North-Holland.

［5］ J. D. Jobson and Bob Korkie, "Putting Markowitz Theory to work", *The Journal of Portfolio Management*, Summer 1981, pp.70—74.

［6］ 竹原 均．"An Empirical Study on the Mean-Variance Portfolio Selection Model Risk Management and Mean-Reversion in Japanese Stock Prices", MTEC Working Paper No. T922, (1992).

［7］ 大森敬治，『Mean Variance Approach の適用性について』，IBM金融システム・ジャーナル，No.3 (1992), pp.67—79.

［8］ Richard O. Michaud, "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?", *Financial Analysis Journal*, January-February 1989, pp.31—42.

学生論文賞受賞論文　　要約

単調多面体の性質とその集合分割問題への適用

田村　直

（東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻　現所属：エッソ石油㈱）

指導教官　山口俊和教授

1. はじめに

組合せ最適化問題は，不等式や等式制約と，一部またはすべての変数が整数に制限されるという条件の下で，目的関数を最大化または最小化する問題であり，さまざまな種類の問題をこのようなモデルとして表現することができる．また，多くの組合せ最適化問題の実行可能解は，凸多面体として表現できる．線形計画問題に対するDantzigによるシンプレックス法では，実行可能領域である凸多面体の組合せ的な特徴が重要な役割を果たしている．このように，多面体理論と組合せ最適化問題とは密接な関係があり，多面体理論を活用した解法を設計するという研究方法がある．この中でも，ある条件を満足する凸多面体のクラスを定義しその性質を分析していく方法は，その凸多面体のクラスが多くの組合せ最適化問題を包含できるため，さまざまな問題において導かれた固有の性質の統一が可能である．

本研究では，単調多面体という凸多面体のクラスを定義する．そして，単調多面体についての性質を導く．また，導いた性質をもとにした局所探索手続きを提案する．さらに，提案する局所探索手続きが集合分割問題に容易に適用できることも示す．

2. 単調多面体とその性質

単調多面体とは，次のような２つの性質をもつ凸多面体である．

性質A．凸多面体Pの任意の異なる２端点$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$がPで隣接していないならば，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$が単調端点列となるような$P$の端点$\boldsymbol{y}$が存在する．

性質B．凸多面体Pの任意の異なる３端点$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$に対して，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ がPの単調端点列であるならばは，$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$は$P$の端点である．

ここで単調端点列とは，凸多面体の端点列$(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^K)$の各添字$j$ごとに対して，$x^0{}_j\leq x^1{}_j\leq\cdots\leq x_j{}^K$または$x^0{}_j\geq x^1{}_j\geq\cdots\geq x_j{}^K$ という条件を満たすものである．また，部分単調端点列とは単調端点列のいくつかの端点を削除して得られるものであり，極大単調端点列とは他の任意の単調端点列の部分単調端点列とならないものをいう．また，単調端点列の隣り合う２端点の差を差分ベクトルという．単調多面体Pは次のようなさまざまな性質をもっている．

定理 2.1 Pを性質Bを満たす凸多面体，Pの単調端点列を$\mu=(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^K)$とする．また，差分ベクトルを$\boldsymbol{d}^i=\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^{i-1}$, $(i\in\{1,2,\cdots,K\})$ とする．このとき，$(1,2,\cdots,K)$ 上の任意の置換 $\rho=(\rho_{(1)},\rho_{(2)},\cdots,\rho_{(K)})$ によって，$\bar{\boldsymbol{x}}^0=\boldsymbol{x}^0$, $\bar{\boldsymbol{x}}^i=\boldsymbol{x}^0+\sum_{k=1}^{i}\boldsymbol{d}^{\rho(k)}$, $\forall i\in\{1,2,\cdots,K\}$ として生成される端点列 $\bar{\mu}=(\bar{\boldsymbol{x}}^0,\bar{\boldsymbol{x}}^1,\cdots,\bar{\boldsymbol{x}}^K)$ はPの単調端点列となる．

定理 2.2 Pを性質Bを満たす凸多面体とする．$\mu=(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^K)$が$P$の単調端点列ならば，その差分ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{d}^i=\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^{i-1}|i\in\{1,2,\cdots,K\}\}$ は線形独立である．

これらの定理により，Pの$K+1$個の端点をもつ単調端点列の差分ベクトルの置換すべてで作られるPの端点は全部で2^K個あり，この端点集合をレゴと名づける．そして，Pの端点の部分集合Vで，V中の任意の２端点を結ぶ単調端点列から生成されるレゴがVに含まれるものの中で，極小な部分集合をVのクロージャーと名づける．また，目的関数が線形で，実行可領域が性質Bを満たす凸多面体であるとき次のことが成り立つ．

定理 2.3 Pを性質Bを満たす凸多面体とする．任意の目的関数ベクトル$\boldsymbol{c}$に対してPの端点$\boldsymbol{x}^K$を$\min\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\in P\}$の最適解の１つとする．このとき，$P$の任意の単調端点列 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^K)$において，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^0\geq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^1\geq\cdots\geq\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^K$ が成り立つ．

また，単調多面体の単調端点列の長さは単調多面体の次元を越えない．さらに，極大単調端点列では次のような定理が成り立つ．

定理 2.4 Pを単調多面体とする．Pの単調端点列 $\mu=(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^K)$が与えられたとき，$\mu$が極大単調端点列であるための必要十分条件は，$\mu$のすべての隣り合う２点$\boldsymbol{x}^{i-1}$, $\boldsymbol{x}^i$, $(i\in\{1,2,\cdots,K\})$ がPで隣接していることである．

単調多面体は多くの重要な最適化問題の実行可能解の凸包として現われる．

命題 2.5 Pを端点がすべて0-1ベクトルである凸多面体とする．そのとき，Pは性質Aを満たす．

命題 2.6 Aをm行n列の要素が有理数の行列，$\boldsymbol{b}$を要素が有理数のn次元ベクトルとする．そのとき，$\{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ の凸包Pは単調多面体である．

$\{\boldsymbol{x}\in\{0,1\}^n|A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$として実行可能解の集合が表わされる問題として，等式制約ナップサック問題，集合分割問題などがある．特に集合分割問題とは，係数行列Aの要素がすべて０または１，ベクトル$\boldsymbol{b}$の要素がすべて１である問題である．

3. 局所探索手続き

線形な目的関数とレゴやクロージャーを実行可能解の集合としてもつ最適化問題を考える．レゴ中の最適解は目的関数値を改善する差分ベクトルのみを加えてできる端点で与えられる．クロージャーでは，得ることのできるレゴの最適解を探索していき，解が改善されなくなるまで繰り返すことにより，クロージャーの最適解に近い解を得ることができる．提案する局所探索手続きの特徴を活かすため，次のような適用方法が考えられる．いくつかのヒューリスティック解法によって初期実行可能解を得てから局所探索手続きを実行する．また，分枝限定法に局所探索手続きを組み込み，暫定解の更新のために用いる．

提案する局所探索手続きを有効に適用するには，任意の２端点間の極大単調端点列を生成することが望ましい．集合分割問題の実行可能解は，その問題の実行可能解集合の凸包の接点に１対１対応している．また，集合分割問題の２つの異なる実行可能解 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が得られたとき，次のようにして極大単調端点列が生成できる．集合分割問題の係数行列をAとし，$I=\{j|x_j\neq y_j\}$ とする．このとき行列Aは，グラフの頂点集合がIに対応し，枝集合がAの行に対応している２部グラフGの接続行列の

転置行列である．また，集合分割問題の実行可能解集合の凸包の２つの端点が隣接しているという必要十分条件は２部グラフGが接続していることである[1]．この性質を用いて，グラフGが連結でなければ，Gの連結成分をすべて求めることにより，極大単調端点列を求めることができる．

4. おわりに

本研究では，単調多面体という凸多面体のクラスを定義した．そして，単調多面体の性質を，主にその端点間の隣接関係を中心に示した．また，単調多面体の性質を利用した局所探索手続きを提案した．提案した局所探索手続きは，ある特定の解法や問題に依存しないためかなり広範囲な適用が可能である．さらに，提案した局所探索手続きが集合分割問題に対して容易に適用可能であることも示した．

参考文献

[１] E. Balas and M. Padberg, "Set Partitioning : A Survey," *SIAM Review*, 18(4)(1976) 710—761.

学生論文賞受賞論文 要約

On Eigenvalues of the Rate Matrix in a PH／PH／c Queue

高野　正次

(東京工業大学大学院理工学研究科情報科学専攻　現所属：ＮＴＴ)

指導教官　高橋幸雄教授

1. はじめに

到着間隔分布やサービス時間分布が相型分布（ＰＨ）であるようなPH/PH/c型待ち行列システムにおいて，その定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ は，いわゆる matrix-geometric form をもつことが知られている．すなわち，$\boldsymbol{\pi}_n$ をその待ち行列システム内にn人の客がいる定常確率ベクトルの部分ベクトルとすると，公比行列と呼ばれるある非負行列Rが存在して，

$$\boldsymbol{\pi}_n=\boldsymbol{\pi}_c\ R^{n-c}\quad (n\geq c) \tag{1}$$

という関係が成り立つ．このことは，定常状態確率ベクトルが無限次元であるにもかかわらず，有限個の有限次元ベクトル $\{\boldsymbol{\pi}_0,\cdots,\boldsymbol{\pi}_c\}$ と行列Rにより，完全に決定されることを示している．したがって，公比行列Rは定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ に対して非常に重要な情報を含んでいる．この重要性のために，Rを実際に数値的に求める計算の手続きがいくつか提案されている．しかし，現実的な問題として，この手続きが有効に働くのは，Rの次元が比較的小さいときに限定されてしまう．というのは，Rは

$$R^2A+RB+C=0 \tag{2}$$

という非線形行列方程式の非負最小解として求めなければならないからである．ここで，行列A，B，Cは推移速度行列の小行列である（次節参照）．

そこで，待ち行列システムの定常的挙動を解析しようとする立場からは，Rを実際に計算することなく，Rの重要な特性を引き出すことができることが望ましい．Rの絶対値最大固有値，つまり，ペロン・フロベニウス固有値は，到着間隔分布とサービス時間分布のラプラス変換を含む代数方程式の解として与えられることが知られており，上の立場での最も重要な成果となっている．そして，ペロン・フロベニウス固有値に対応する固有ベクトルは，$c+1$個のベクトルのクロネッカー積として与えられる．$\boldsymbol{\pi}$ が，matrix-geometric form をもつことからすぐにわかることであるが，$\boldsymbol{\pi}_n$ の漸近的挙動は，Rの比較的に絶対値の大きい固有値が支配している．このことが，$\boldsymbol{\pi}$ の裾の近似的数値計算の高速化や評価を可能にしている．

本研究は，上のようなRのペロン・フロベニウス固有値に関する結果を，Rのすべての固有値に対して拡張することを意図したものである．

2. 準　　備

ここで扱うシステムは，窓口ごとにサービス時間分布が異なる場合も許す PH/PH/c 型待ち行列システムである．ただし，到着間隔分布 $T=\mathrm{PH}$ $(\boldsymbol{\alpha}_0, \boldsymbol{Q}_0)$ とすべ