

MVモデルのパフォーマンス評価

—可能性曲線の事前事後分析—

TAN AH CHOON

(筑波大学大学院経営政策科学研究科 現所属：㈱日立製作所)

指導教官 山本芳嗣教授

1. 研究の目的

Markowitz の MV モデルは理論的には魅力的なモデルであるが、実際の応用には、次にあげるような問題点がある。

(1) 平均・分散の正確な推定が不可能であり、真の効率的ポートフォリオの導出が不可能である。

(2) 多くの場合、単純に推定された平均・分散にもとづくシャープ・メジャー最大化ポートフォリオのパフォーマンス (事後的シャープ・メジャー) は、均等比率ポートフォリオのパフォーマンスより大幅に劣る。

以上の問題点に対して、MV最適ポートフォリオを計算することは意味があるのか否か？ また、MVモデルは実際に応用できるのか疑問となる。本論文の目的は、平均・分散の推定にいかなる工夫をくわえれば、Markowitz の MV モデルを実際に応用できるのか検討し、そのための方法を明らかにすることにある。

2. MVモデルと事前・事後分析

MVモデルにもとづく投資戦略の最大の欠点は、サンプル期間内はともかく、サンプル期間後の投資成果が劣るところにある。すなわち、事前のパフォーマンスがよくても、その投資結果として得られる事後のパフォーマンスが悪くなることである。特に通常ポートフォリオのパフォーマンス測定ベンチ・マークとして利用される均等比率ポートフォリオのパフォーマンスに比べて、大幅に劣ってしまう。その原因として、本論文では、パラメータ推定の問題を考察する。そして、ポートフォリオの事前・事後分析の結果から、推定誤差による近似的最適解の不正確さが、このパフォーマンス低下の原因であることを明らかにする。本実証分析で分析した証券は、1990年12月末現在に日経 225 種株価指数に採用されている銘柄(NTT株を除く)224 銘柄であり、用いたデータは1976年1月から1990年12月までの15年間の月次収益率

表 1 データ・セットの分類

データ・セット	使用データ期間	基本推定期間 (単位:年)	運用期間
D ₁	1976.1— 1990.12	2, 6, 11	1987.1— 1990.12
D ₂	1976.1— 1989.12	2, 6, 10	1986.1— 1989.12
D ₃	1976.1— 1988.12	2, 6, 9	1985.1— 1988.12
D ₄	1976.1— 1987.12	2, 6, 8	1984.1— 1987.12
D ₅	1976.1— 1986.12	2, 6, 7	1983.1— 1986.12
D ₆	1976.1— 1985.12	2, 6	1982.1— 1985.12

である。またデータは、表1のように6セットに分類して分析を行なった。基本推定期間ならびに運用期間はデータ・セットに応じてそれぞれ異なる。

3. 株価過程の性質

本研究では、まず株価収益率の従う確率過程がいかなる統計的性質をもっているかを検討した。そのために、1976年1月から1990年12月まで、日経 225 種株価指数に採用されている全銘柄 (ただし、NTTを除く) について、株価収益率の平均および分散パラメータのエルゴード性の検定ならびにシャープ・メジャー (標準偏差1単位あたりの平均超過収益率) を最大化するポートフォリオの事前事後分析を行なった。結果として、以下の3点が明らかになった。(1)エルゴード性が成立している期間は、高々120カ月程度である。(2)各銘柄ごとの自己相関係数には、通常の意味での大域的な負の相関は見られないものの、引き続き数カ月の平均データとの間には、多くの銘柄に大域的な負の相関が見られる。

4. 順張り戦略の場合

順張り戦略とは、事前でよいパフォーマンスを狙えば、事後も同様のパフォーマンスが達成できると予想する投資戦略をさす。本研究では、まず、シャープ・メジャー

最大化ポートフォリオ運用、日経 225 種株
 価指数運用および均等比率ポートフォリオ
 運用について事前・事後分析を行ない、こ
 れらの事前・事後パフォーマンスを比較検
 討する。その結果、過去 120 カ月のヒスト
 リカル・データにもとづく推定パラメータ
 では、真の最適ポートフォリオに近い解が
 得られているとはいえなかった。この原因
 としては、推定誤差による近似解の不正確
 さが考えられる。本研究では、まず、分散
 のみを推定パラメータとする分散最小化ポ
 ートフォリオに注目し、そのパフォーマンス
 (事後のシャープ・メジャー) を検討し
 た。結果として、過去 120 カ月のヒストリ
 カル・データにもとづく分散推定パラメー
 タのみを利用した場合、十分満足のいくポ
 ートフォリオのパフォーマンスが達成でき
 た。(図 1)

5. 逆張り戦略の場合

逆張り戦略とは、ミーン・リバージョン性を積極的に
 利用し、事前の平均収益率を低めに設定して、結果的に
 事後のポートフォリオのパフォーマンスを向上させる運
 用法を指す。本研究では、負のリスク許容度 λ に対応し
 たシャープ・メジャーを最小化ポートフォリオ (以降、
 λ シャープ・メジャー最小化ポートフォリオと呼ぶ)
 の事前・事後分析を行ない、そのパフォーマンスを検討
 する。各リスク許容度 λ をパラメータとして、次のよう
 なパラメトリックな 2 次計画問題 (Quadratic Progra-

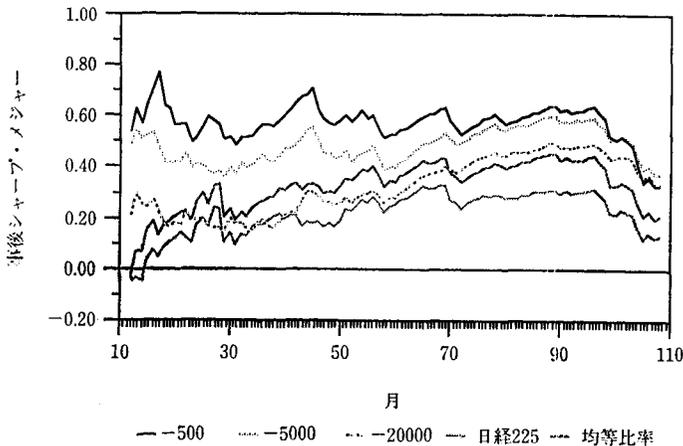


図 2 事後シャープ・メジャーの比較
 1982年1月～1990年12月

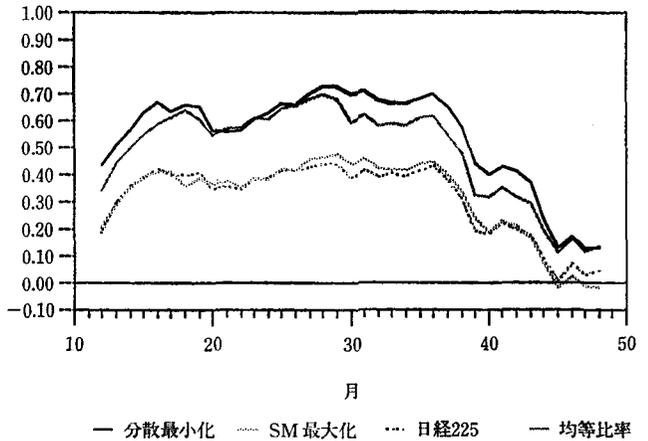


図 1 事後シャープ・メジャーの比較
 1987年1月～1990年12月 (基本推定期間=6年間)

mmining Problem) を考える。

$$P\lambda \begin{cases} \text{最小化 } \frac{1}{2}y^T y - \lambda \mu^T X \\ \text{条件 } y - AX = 0 \\ e^T X = 1 \\ X \geq 0 \end{cases}$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} R_{11} - \mu_1 & \cdots & R_{m1} - \mu_m \\ \vdots & & \vdots \\ R_{1n} - \mu_1 & \cdots & R_{mn} - \mu_m \end{bmatrix}$$

$$\mu_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_{it}$$

λ はリスク許容度、 e は成分がすべて 1 のベクトル、
 λ は平均超過収益率ベクトルである。

その結果、(1)少なくとも 1976 年 1 月以降のデータを利用
 するに限り、基本推定期間が長くなれば
 なるほど、ポートフォリオの事後のパフ
 ーマンスは向上する傾向にある。すなわち、
 過去のデータをフルに使って分析すること
 が有効となる。(2) λ はおよそ -500 前後に
 設定すれば、安定して良好な事後のパフ
 ーマンスが達成できる。 $\lambda = -500 \sim -20000$
 に対応した λ シャープ・メジャー最小化ポ
 ートフォリオの事後のパフォーマンスを図
 2 に示す。横軸は運用期間、縦軸は事後
 シャープ・メジャーである。

5. 結 論

本研究では、日本の証券市場データを用
 いて Markowitz の MV モデルの適用可能

性を考察した。その結果、MVモデルを実際に適用するためには、過去の実現収益率にもとづく標本平均をあてにせず、(1)あらかじめ、すべての銘柄の平均収益率を等しいものと見なして投資する(分散最小化戦略)か、(2)市場の平均的パフォーマンスに比したミーン・リバージョンを積極的に利用し、やや低めの標本収益率ベースの収益率を狙う(逆張り戦略)必要がある。ただし、(1)(2)の投資戦略を利用するにあたっては、次の工夫が求められる。

(1)分散最小化ポートフォリオにおいては、基本推定期間を適切(約6年間)に設定する必要がある。

(2)逆張り戦略においては、基本推定期間は過去のデータをフルに利用できるものの、 λ を適切(約-500)に設定する必要がある。

参考文献

[1] Edwin J. Elton, Martin J. Gruber, "Modern Portfolio Theory And Investment Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1987.
 [2] Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection." *Journal of Finance*, March 1952, pp.77-91.
 [3] 白川 浩, 『標本統計量に基づくマコービット効率

的ポートフォリオの漸近的性質と事前・事後分析』, 日本応用数理学会, 平成4年度年会予稿集, pp.271-272, 1993.

[4] James M. Poterba, Lawrence H. Summers, "Mean Reversion in Stock Prices, ...Evidence and Implications...", *Journal of Financial Economics* 22(1988), pp.27-59, North-Holland.
 [5] J. D. Jobson and Bob Korkie, "Putting Markowitz Theory to work", *The Journal of Portfolio Management*, Summer 1981, pp.70-74.
 [6] 竹原 均. "An Empirical Study on the Mean-Variance Portfolio Selection Model Risk Management and Mean-Reversion in Japanese Stock Prices", MTEC Working Paper No. T922, (1992).
 [7] 大森敬治, 『Mean Variance Approachの適用性について』, IBM金融システム・ジャーナル, No.3 (1992), pp.67-79.
 [8] Richard O. Michaud, "The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?", *Financial Analysis Journal*, January-February 1989, pp.31-42.

単調多面体の性質とその集合分割問題への適用

田村 直

(東京理科大学大学院工学研究科経営工学専攻 現所属: エッソ石油株)

指導教官 山口俊和教授

1. はじめに

組合せ最適化問題は、不等式や等式制約と、一部またはすべての変数が整数に制限されるという条件の下で、目的関数を最大化または最小化する問題であり、さまざまな種類の問題をこのようなモデルとして表現することができる。また、多くの組合せ最適化問題の実行可能解は、凸多面体として表現できる。線形計画問題に対するDantzigによるシンプレックス法では、実行可能領域である凸多面体の組合せ的な特徴が重要な役割を果たしている。このように、多面体理論と組合せ最適化問題とは

密接な関係があり、多面体理論を活用した解法を設計するという研究方法がある。この中でも、ある条件を満足する凸多面体のクラスを定義しその性質を分析していく方法は、その凸多面体のクラスが多くの組合せ最適化問題を包含できるため、さまざまな問題において導かれた固有の性質の統一が可能である。

本研究では、単調多面体という凸多面体のクラスを定義する。そして、単調多面体についての性質を導く。また、導いた性質をもとにした局所探索手続きを提案する。さらに、提案する局所探索手続きが集合分割問題に適用できることも示す。