

アラル海の水位 —微分方程式による考察—

柳井 浩

1. はじめに

中央アジアに位置するアラル海は、カザフスタン、ウズベキスタンそしてトルクメニスタンの3共和国に囲まれた、海水の1/3程の濃度の塩水湖である。遠くパミール高原および天山山系に源を発する2つの大河アム・ダリア、シル・ダリアの水が注ぐ、出口のないこの内陸湖は、かつて世界第4位の湖水面積を誇っていた。しかし、過去30年間にわたって行なわれた、両大河からの、主として灌がい農業用の大量の取水は、湖面を大幅に縮小、今やこれを枯渇の危機にさらしている。

湖面の縮小は、この地方一帯の気象の悪化をもたらし、そのためにしばしば発生する嵐は、干上がった湖底の塩分をはこりとして空中にまき散らし、農作物にも甚大な悪影響を与えている。そればかりではない。除草剤等の農薬の使用は出口のないこの湖水を汚染し、付近の井戸の水質までも極端に悪化させ、住民の健康をいぢめるしく害い、漁民等湖水にたよって暮してきた人々の生活を根底から破壊するにいたった。その惨状には、誠に目を覆わせるものがある。

このような報道に加えて、専門家の調査もこれを裏づけた。地上における調査のみならず、航空機や人工衛星による上空からの種々の科学的観測は、さらにくわしいデータを提供した[1]。

また、アム・ダリアおよびシル・ダリア両水系ネットワークの構造と取水の現状と予想をとり入れたシミュレーション[2]は、アラル海の枯渇の危機を如実に示していた。

筆者は、日本オペレーションズ・リサーチ学会の研究会「巨大プロジェクトに関するOR」(主査=柳井浩)の研究集会において山元順雄氏(日本G I F研究財団)より、この問

題に関する大略の報告を受け、問題を構造的に理解するために、ごく単純な微分方程式モデルを作って考察してみた。その結果、一定の流入量に対しては、水位や面積が年月の経過とともに、一定の最終値に近づくことがわかった。さらに、文献[2]のシミュレーションの基本的なデータ、すなわち湖底の形状と流入量の推移を用いて、微分方程式モデルによるシミュレーションを試みたところ、水位および面積の推移が文献[2]に報告されている過去の実績とシミュレーションによる将来の予測にきわめてよく一致することがわかった。

微分方程式モデルの妥当性をこのように検証したうえで、アラル海の場合について面積の最終値を計算したところ、これがアラル海への水の流入量に正比例するという、じつに簡単な結果が得られた。すなわち、アラル海の水面を維持しようとするならば、他の水を導かぬかぎり、取水を制限する他はないのである。

しかし、取水の制限もすぐに効果を現わすものではない。仮に今すぐ(1995年から)、湖水への流入量を1960年の水準に戻したとしても、湖水がもと(1960年)の面積の90%にまで回復するには約40年を要することが、同じモデルによるシミュレーションによって見積もられるのである。自然の恵みに限界があることを無視した結果、



図1 アラル海とその周辺

やない ひろし 慶応義塾大学 理工学部

〒223 横浜市港北区日吉3-14-1

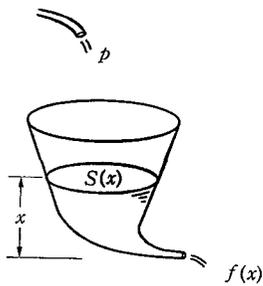


図 2 流入と流出

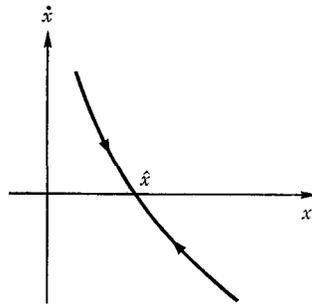


図 3 相軌道図

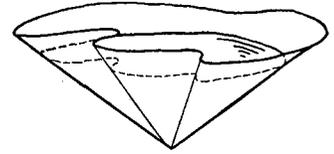


図 4 錐体形状

環境そのものを破壊してしまった開発至上主義に対する手厳しい教訓として受けとるべきであろう。

本稿では、以下において、この微分方程式モデルによる考察とシミュレーションについて詳述する。

2. 数理モデル

図 2 に示されるような桶を考えよう。

この桶は、水位が

$$x: \text{水位} \quad (1)$$

であるときの水面の面積が

$$S(x): \text{水面の面積} \quad (2)$$

となるような形状をもっている。(水面は水位にかかわらず、常に連結した領域をなすものと仮定する。)いまこの桶に単位時間あたり

$$p: \text{単位時間あたりの流入量} \quad (3)$$

という水が流入する一方、単位時間あたり

$$f(x): \text{単位時間あたりの流出量} \quad (4)$$

という水が流出するものとしよう。このとき、水位 x について次のような微分方程式が成立する。

$$\dot{x} = \frac{1}{S(x)} \{p - f(x)\} \quad (5)$$

ここに \dot{x} は水位の時間微分を表す。この微分方程式が本稿の基本的モデルである。桶は湖水、流入は河川や降雨、流出は河川による流出、蒸発、地下への浸透等による水の損失に対応している。

このような対応関係からすれば、水面の面積 $S(x)$ および流出量 $f(x)$ が、 $0 \leq x$ において定義された非負の単調増加関数としてよいだろう。したがって、微分方程式(5)によって与えられる水位 x とその時間微分 \dot{x} との関係を $x-\dot{x}$ 平面に図示すれば、大略、図 3 に示されるような曲線が得られよう。

このような曲線は相軌道図と呼ばれるが、それは点 $(x,$

$\dot{x})$ (状況点と呼ばれる) で表わされるこの系の状態が、この曲線に束縛され、それから外れることができないという意味である。そして、 \dot{x} が x の変化率であることから、

$\dot{x} > 0$ のときには状況点は右方へ

$\dot{x} < 0$ のときには状況点は左方へ

向かって動く、そこで相軌道の形からして、充分時間が経過すれば、状況点は相軌道と x -軸の交点 $(\hat{x}, 0)$ に近づく。ここに \hat{x} は微分方程式(5)の右辺がゼロ、すなわち方程式

$$p - f(x) = 0 \quad (6)$$

を満たす x の値である。この \hat{x} を流入量 p に対する最終水位と呼ぶ。

また、湖からの水の損失であるが、アラル海には出口がない。湖水の水は蒸発や地下への浸透によって失われる。この地方のような乾燥した地方では蒸発が最も大きな要因となることは、想像に難くないが、これはいままでもなく湖水の面積に比例する。むろん、温度や湿度にも依存するが、1年を1単位時間とするような話では、年間をまとめて考えればよい。また、地下への浸透は水が存在するその下でなければ起り得ない。水深による多寡はあるにしても、第1次近似としては湖水の面積に比例する項をとるべきである。このような見地からすれば流出量 $f(x)$ は

$$f(x) = v \cdot S(x) \quad (7)$$

という式によって近似できる。

アラル海の場合については、次節で述べるが、いまここで一例として、湖底が錐体形状をなす場合を考えてみよう(図 4)。この形状の下では、湖水の面積は水位の2乗に比例する。それゆえ、面積 $S(x)$ は

$$S(x) = s \cdot x^2 \quad (8)$$

したがって

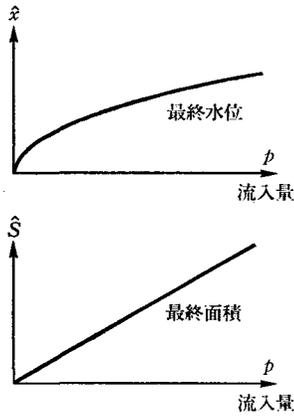


図 5 錐体形状の場合の最終水位と湖水の最終面積

$$f(x) = v \cdot s \cdot x^2 \quad (9)$$

と書くことができる。ここに、 s は比例係数である。

(9)式を(6)式に代入すれば、

$$p - v s x^2 = 0 \quad (10)$$

を得る。それゆえ、最終水位は

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{p}{v s}} \quad (11)$$

となる。すなわち、流入量 p の平方根に比例する。またこれを(8)式に代入すれば最終水位に対応する湖水の最終面積 \hat{S} は

$$\hat{S} = s \hat{x}^2 = \frac{p}{v} \quad (12)$$

となる。すなわち、湖底の形状が錐体をなす湖水の面積は、最終的には流入量に比例するという、単純な結果が得られる。(図5)

3. シミュレーションとモデルの妥当性

P. Raskin, Z. Zhu らは文献[2]において、アム・ダリアおよびシル・ダリア両河川をめぐる複雑な配水システムを、かなりこまかくコンピュータ上に再現、さらに年間の降水も5つのパターンにわけて、現実のデータに合わせてそれぞれに確率を割りあて、シミュレーション(WEAP)を行なった結果を示している。Zhu博士の許可を得てこれを載録したのが図6である。

一方、アラル海に関して、百科事典程度の一般的な記述以上の詳しいデータを、直接、しかも早急に得ることは、われわれには困難であった。そこで、この文献に用

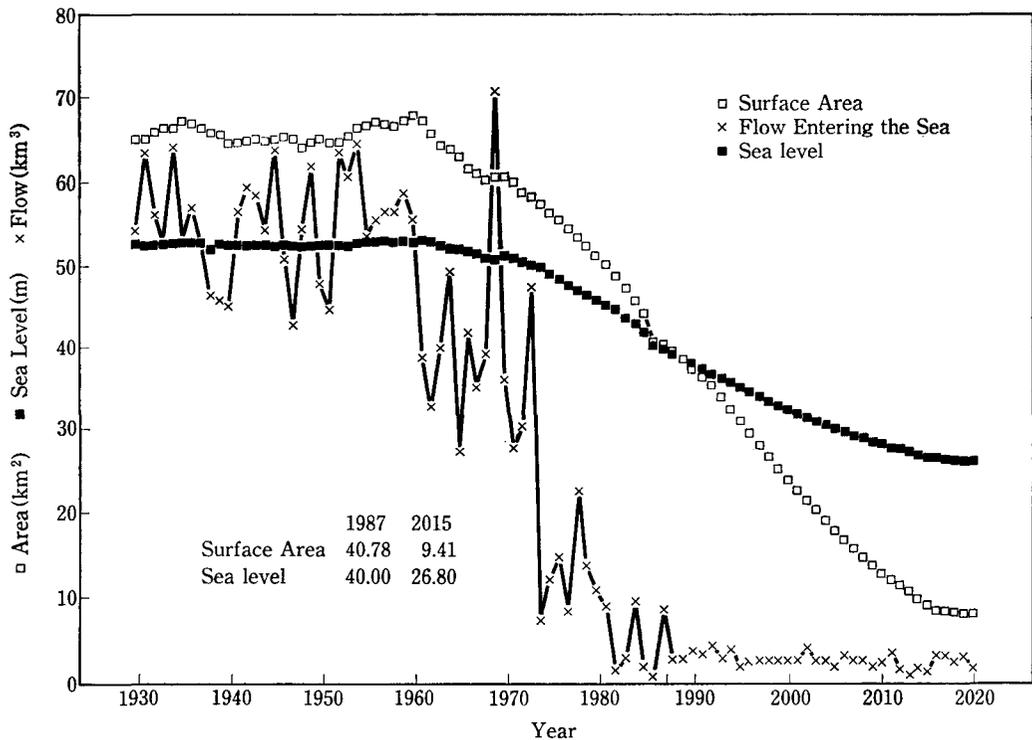


図 6 WEAPによるシミュレーションの結果

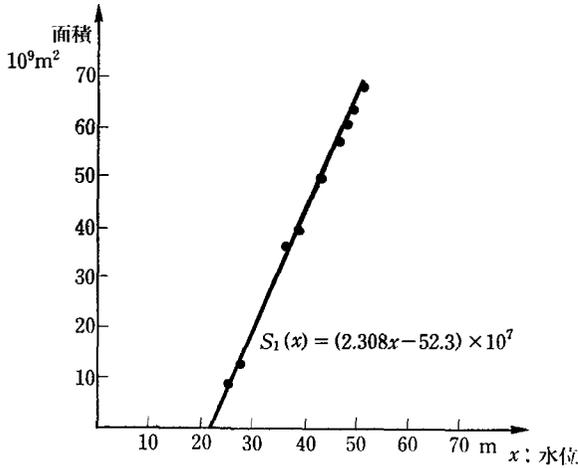


図7 アラル海の水位と面積

いられているデータを借りて本稿のモデルの妥当性を検証してみることにした。

まず、水位と面積の関係であるが、これは湖底の形状によって定まる。文献[2]のシミュレーションでは、実測の結果を使っているはずだから、図6から水位と面積の値を採取し、これをヨコ軸とタテ軸の値としてプロットして結べば、この関係が得られる。図7にその結果を示す。そこで、水位 x に対する面積 $S(x)$ を

$$S_1(x) = (2.308x - 52.3) \times 10^7 \quad x > 22.66$$

$$= 0 \quad x \leq 22.66 \quad (13)$$

によって近似してみることにした。

ここで、この式による近似の幾何学的意味を考えてみよう。一般化していえば(13)式は

$$S_1(x) = ax - b \quad x > \frac{b}{a}$$

$$= 0 \quad x \leq \frac{b}{a} \quad (14)$$

という形である。いま仮に湖水が水位にかかわらず円形をしている場合を考えれば、その半径 $r(x)$ と面積とは

$$2\pi r^2(x) = S_1(x) \quad (15)$$

という関係にあるから、これから $r(x)$ を求めれば

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{(ax - b)} \quad x > \frac{b}{a}$$

$$= 0 \quad x \leq \frac{b}{a} \quad (16)$$

という関係が得られる。これを模式的に示したのが図8である。

すなわち、井戸のような狭く深い場所があり、その周囲に中華鍋の底のような形の湖底が広がっている。このことはアラル海に関する“浅く広く、一部に70m近い深い部分がある”という百科辞典の記述とも符合するもの

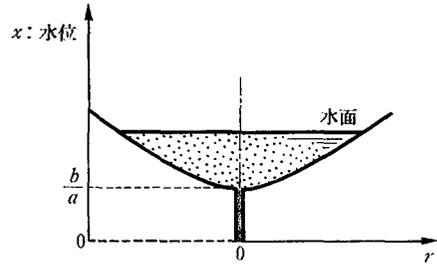


図8 湖底の形状

である。

さて、次に、流入量とその推移を調べよう。図6から1950年ごろまでは、

$$\text{水位} \quad x = 52\text{m} \quad (17)$$

$$\text{面積} \quad S(52) = 68 \times 10^9 \text{m}^2 \quad (18)$$

$$\text{流入量} \quad p = 55 \times 10^9 \text{m}^3/\text{年} \quad (19)$$

で落ち着いており、さらに、この時代には年間の流入量と損失量がバランスして、水位が安定水位に達していたものと見て、

$$\text{損失量} \quad f(52) = 55 \times 10^9 \text{m}^3/\text{年} \quad (20)$$

と考えた。(18)および(20)式を(7)式に代入

$$v = \frac{f(52)}{S(52)} = \frac{55 \times 10^9}{68 \times 10^9} = 0.809 \text{m}/\text{年} \quad (21)$$

を得た。今かりに、アラル海の水の損失量がすべて水面からの蒸発であるものとするれば、これは809mm/年の蒸発に相当する。

さて、次に流入量の経年変化であるが、この文献[2]では過去については実際のデータを、将来については相応の根拠にもとづく想定の上に偶発的な気候の変化をシミュレートしたものを加えて作っているようである。本稿では大体の傾向をつかむだけでよいので、この流入量の経年変化を近似的に

$$p(t) = \begin{cases} 55 \times 10^9 & t \leq 1960 \\ [2 + 53 \exp(-0.7(t - 1960))] \times 10^9 & t > 1960 \end{cases} \quad (22)$$

とおくことにした。

さて、微分方程式(5)の p を $p(t)$ でおきかえた方程式

$$\dot{x} = \frac{1}{S(x)} [p(t) - f(x)] \quad (23)$$

にこれらの関数を代入し、初期条件を

$$x(1950) = 52 \quad (24)$$

として解を数値的(Runge-Kutta法)に求めてみたのが、図9である。

さらに、図9と図6を重ねてみたのが図10である。こ

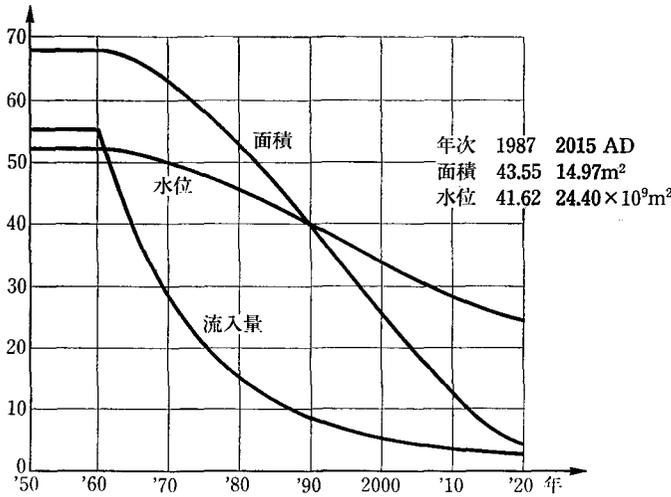


図9 微分方程式モデルによる水位と面積の経年変化のシミュレーション

れからもわかるように、2つのシミュレーションの結果はきわめてよく一致している。したがって、本稿の数値モデルの妥当性は、とりあえず、否定されないものとしてよかろう。

次に最終水位について考えてみよう。

$$f(x) = v \cdot S_1(x) \quad (25)$$

としてこれを(6)式に代入して最終水位を求めれば、

$$\hat{x} = \frac{b}{a} + \frac{p}{a \cdot v} \quad (26)$$

となる、したがって、このときの湖水の面積 $S(x)$ 、すなわち最終面積がアラル海の場合にも錐体形状の場合と等しく

$$\hat{S} = S(\hat{x}) = \frac{p}{v} \quad (27)$$

ということになる。これらを図示したのが図11である。

こうして見てくると、この湖水の水位の挙動が本質的には単純で、本稿に述べたような1本の微分方程式によっても、大概のところは十分に記述できることが推測される。この微分方程式モデルの妥当性を容認

するならば、この湖水の面積は最終的に

$$\text{最終面積} = \frac{\text{年間流入量}(m^3)}{\text{年間損失量(蒸発量)}(m)} \quad (28)$$

という値になる。

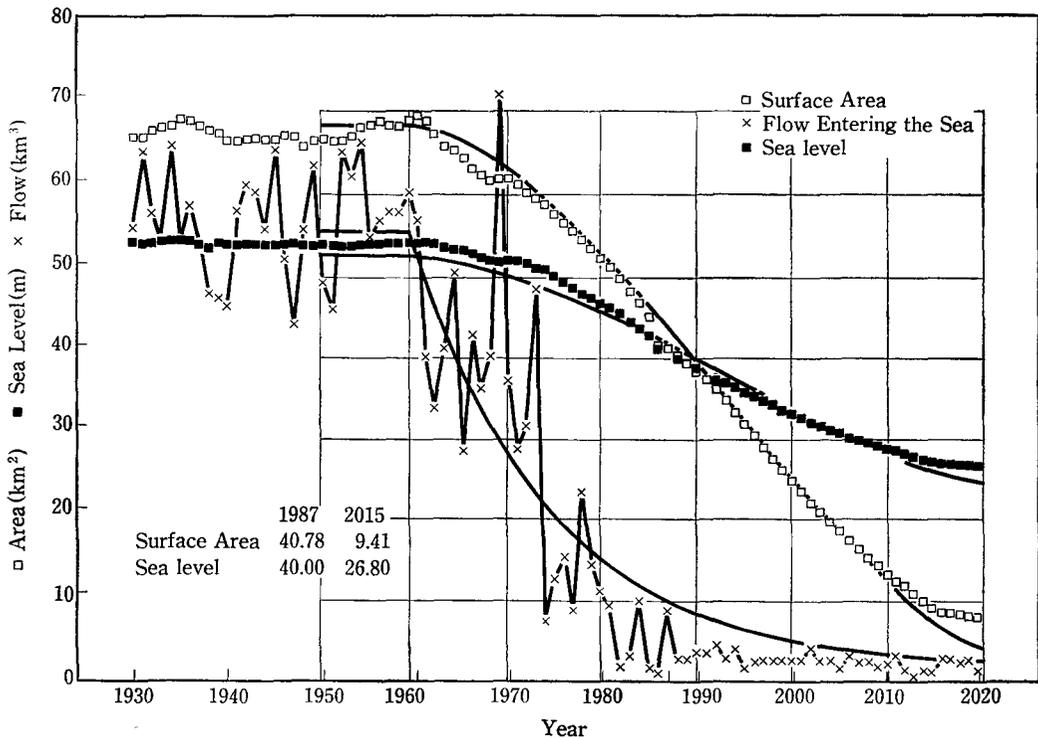


図10 2つのシミュレーションの比較

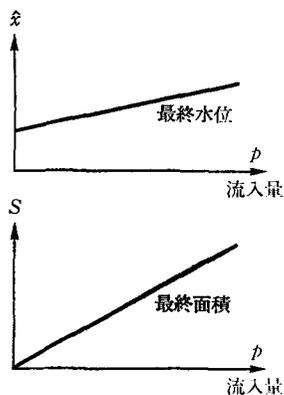


図 11 アラル海の最終水位と湖水の最終面積

したがって、アラル海の面積の維持を欲するならば、この式が示すごとく、損失(その大部分は蒸発であろう)を防ぐか、あるいは流入量を確保しなければならないのである。前者が不可能なら後者が唯一の方法となる。

そこで、取水制限の効果を見積もることしよう。仮に今すぐ(1995年から)現在のような取水を全面的に停止して、流入量を1960年の水準に戻したときの水位と面積の回復の過程を本稿の微分方程式モデルによるシミュレーションによって計算した結果が図12である。この図に見るとおり、湖水の回復の過程はきわめて緩慢である。湖水の面積がもと(1960年)の90%になるのは2035年頃、すなわち取水制限を始めてから約40年後のことと見積もられる。

〔謝辞〕1. でも述べたとおり、本稿は日本OR学会「巨大プロジェクトに関するOR」研究会における山元順雄氏(日本G I F研究財団)らの報告と討論を発端とするものである。また、日本G I F財団は1992年10月29日に国連大学で行なわれた「アラル海問題に関するシンポジ

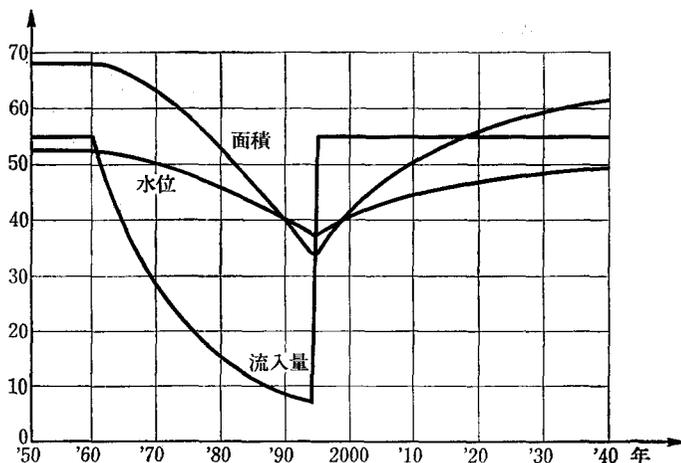


図 12 取水制限と湖面の回復

ウム」に筆者等を招待せられ、席上、文献[2]の筆者の1人であるZhu博士を紹介された。その折、筆者は同博士と本稿のシミュレーションの結果をともに検討する機会を得た。またその後、文献[2]のシミュレーションの結果を掲載することについても、同財団を通じてお願いしたところご快諾をいただいた。

本論文の発表はこれらに関係する皆様のご協力のたまものである。ここに感謝の意を表したい。

文 献

- [1] Micklin, Ph. P. "Desiccation of the Aral Sea: A Water Management Disaster in the Soviet Union" *Science*, Vol.241, 1988, Sept. pp.1170—1176
- [2] Raskin, P., Hansen, E., Zhu, Z., IWRA, M. and Stavisky, D. "Simulation of Water Supply and Demand in the Aral Sea" *Water International* 17 (1992) pp.55—67