

線形計画法のパソコン用パッケージ

——パーソナルLP——

平本 巖, 栗原 和夫

1. はじめに

“パーソナルLP”は線形計画法を2段階単体法で単体表により視覚的に実行するとともに、2次元および3次元の図解法を行なう教育用パッケージである。操作はメニュー方式で簡単であり、係数表から初期単体表(出発基底形式)の自動作成、単体法演算の詳細ステップの前進および後進、中断保存、感度分析、グラフ画面の出力、3次元図形を見やすくする視点の移動等の機能をもつ。また、問題の入力は表形式で行なうが、変数の意味等の日本語入力も可能である。

2. 問題の入力

問題の入力は、画面上で「係数表」を完成させることによって終了する。簡単な例([1]から引用)で示す。

[例題1] $2A + B \leq 60$ (制約式1)

$2A + 5B \leq 100$ (制約式2)

$4B \leq 60$ (制約式3)

$A \geq 0, B \geq 0$ (非負条件)

$6A + 7B \rightarrow$ 最大化 (目的関数)

スタート画面(図1)の初期メニュー欄から「係数表の操作」を選び、次にサブメニュー「主問題の作成/修正」を選ぶ。それから問い合わせに答えると係数表の形式(表1)が画面に表示されるので、カーソル(同表では黒塗りの枠)を上下左右に移動しながら問題の係数の値および不等号等を入力する(表2)。この例では、不等号の向きを変更する必要がなく、また最大化問題なので右辺欄の目的関数を表わすOAの符号+もそのままよい。(最小化問題なら符号-に変更する。)これで問題の入力が終了したからSTOPキーを押してメニュー欄を初期メニューに戻す。

ひらもと いわお 愛知学泉大学 経営学部

〒471 豊田市大池町汐取1

くりはら かずお 朝日大学 経営学部

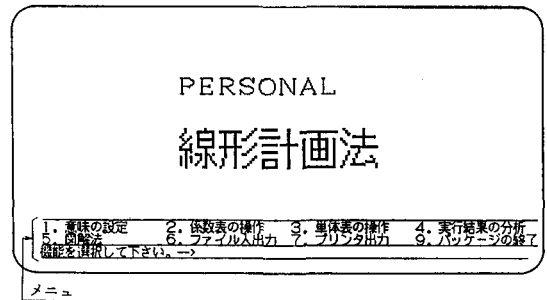


図1 スタート画面

表1 係数表の形式

主問題	A	B		右辺
目的関数	0.000	0.000	=	+0A
制約式01	0.000	0.000	<	0.000
制約式02	0.000	0.000	<	0.000
制約式03	0.000	0.000	<	0.000

表2 例題1の係数表

主問題	A	B		右辺
目的関数	6.000	7.000	=	+0A
制約式01	2.000	1.000	<	60.000
制約式02	2.000	5.000	<	100.000
制約式03	0.000	4.000	<	60.000

3. 図解法

3.1 2変数の場合

例題1の入力が終了している、すなわち、係数表が完成しているでしょう。

初期メニューから「図解法」を選ぶ。次にサブメニュー「図解法の実行」に続いて「主問題」を選ぶと図2が

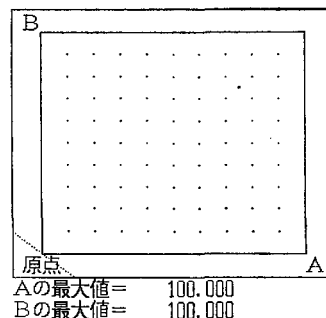


図2 2次元図解法の座標軸の設定

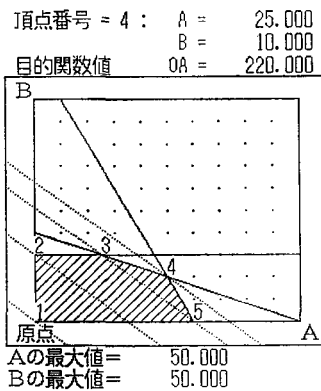


図 3 例題 1 の図解法

現われる (画面上ではこの図の左側に問題の数式がついているが、紙面の都合で割愛した)。そこで制約式の番号 1, 2, 3 を順次入力すると、各々の制約式の範囲が順次図示されてゆき、実行可能領域を示す単体が斜線で表わされる(図 3 の斜線部)。ここで頂点番号は自動的につけられる。なお、図 2 の原点を通る点線は例題 1 の目的関数の勾配を表わす。次に目的関数を計算する頂点番号を入力すると、図 3 のようになる。同図は、頂点番号 2, 3, 4 を入力したものである。同図を見ると、頂点番号 4 (座標は A=25, B=10) で目的関数 OA の値が最大値 220 をとることがわかる。ところで、単体をもう少し大きくしたいならば、STOP キーでメニュー画面に戻ってから「座標軸の設定」を選ぶ。そして A および B の最大値を各々、たとえば 50 に指定して「図解法の実行」を行えばよい。(じつは図 3 は、見やすくするためにそうしている)

3.2 3変数の場合

バター製造販売計画問題 ([2] から引用) を例題 2 として 3 次元図解法を説明しよう。

[例題 2] $3A + 3B + 2C \leq 900$
 $2A + B + 2C \leq 580$
 $A + 2B + C \leq 480$
 $3A + 3B + 6C \leq 1500$
 $0.236A + 0.294B + 0.313C \leq 100$
 $A, B, C \geq 0$
 $1.6A + 1.5B + 1.7C \rightarrow \text{最大化}$

さて、問題の入力すなわち係数表の作成は例題 1 で説明したとおりに行なう。2 変数の場合と同様にメニューから「図解法」と「図解法の実行」を選ぶと図 4 が現われる。(ここでは印刷の都合上「線画モード (f・5 キ

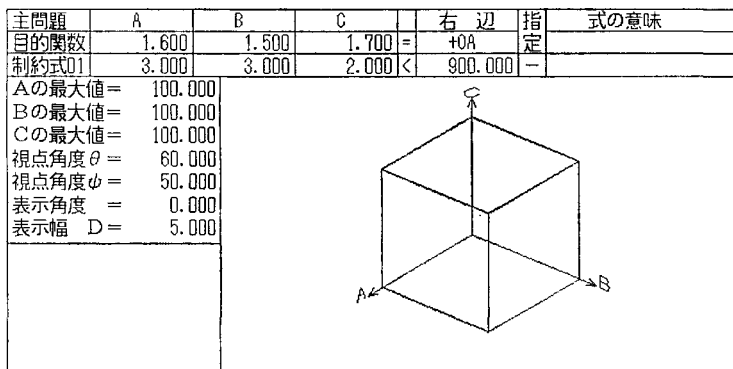


図 4 3次元図解法の座標軸の設定

ー) を用いた。パソコン画面上ではきれいにカラー表示されている。)ここで、3次元図形である単体を描くために必要な座標軸 A, B, C の最大値, 視点角度 θ , ϕ , 表示角度および表示幅 D 等の値 (これらの意味については後述) が同図の左端に示されているように自動設定される。

制約式番号 1, 2, ... を入力すると、小さな三角形が瞬間現われるだけで実行可能領域が図示されない。これは座標軸の設定がよくないためであるから、STOP キーでメニュー画面に戻って「座標軸の設定」を選ぶ。そして座標軸 A, B, C の最大値を各々 300 に変更する。それから「図解法の実行」を選び、制約式番号 1, ..., 5 を順次入力すると順次制約式の範囲が図示されてゆき、最後に図 5 のような実行可能領域を示す単体が表示される (これも線画モードでプリントした)。ここで頂点記号は自動的につけられる。なお、2次元と3次元の場合の単体の表現法の違いについては [3] を参照願いたい。

次に、目的関数値を計算する頂点記号を入力する。たとえば頂点 G と頂点 J を入力すると図 6 が表示される。ここで、頂点 G を通る帯状の図形に着目していただきたい。これが、われわれが考案した襟巻法による頂点 G を通る目的関数面の表現である (カラー画面では襟巻がき

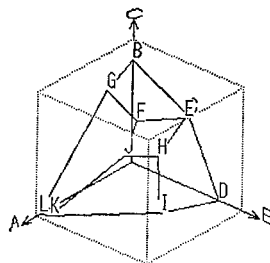


図 5 例題 2 の単体(線画モード)

主問題	A	B	C	右 辺	指 定	式の意味
目的関数	1.600	1.500	1.700	=	+0A	
制約式05	0.286	0.294	0.313	<	100.000	滑
Aの最大値=	300.000					
Bの最大値=	300.000					
Cの最大値=	300.000					
視点角度 θ =	60.000					
視点角度 ψ =	50.000					
表示角度 =	0.000					
表示幅 D =	5.000					
頂点記号 =	J					
頂点座標A =	133.368					
頂点座標B =	93.316					
頂点座標C =	109.974					
目的関数值 =	540.319					

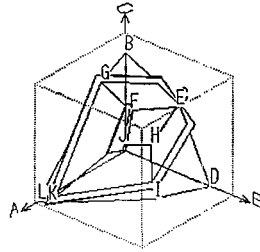


図 6 頂点GおよびJを通る目的関数面(線画モード)

れいに単体を包んでいる絵になっている)。一般に3変数の場合には、目的関数は3次元空間内の平面となり、単体上の特定の頂点を通る目的関数面は単体との相貫図として描くことができる。しかしこれを単体内にある部分にのみ限ると、単に単体との相貫線(等高線)となってしまう、肝心の最適基底解の所ではこの線は点となり消滅してしまう。そこで、この相貫線に少し罫を出して目的関数面を表現するように工夫したのが襟巻法である。図6では罫の幅D=5としているが、この表示幅は0%から100%までの値を指定できるようになっている。たとえば100%と指定すると、頂点Gよりも大きな値をもつ頂点で示された凸多角形が海面に浮かぶ氷山の一角のように示される。(その図は紙面の都合で割愛する。)図6において、実は頂点Jが最適解であるが、そこでは襟巻でくるむ首がなくなってしまい、頭の天辺である頂点Jに小さな平面がへばりついている。

ところで、3次元図解法をわかりやすくするためには、問題によって適当に座標軸の設定を行わなければならない。その場合に①最初の立方体が認識しやすい位置にあること、②その位置から見た単体の各頂点がよく分離していること、③罫の幅を適当に決めること、等が肝要であるが、パラメータ入力または図形の回転機能によりこれらを行なうことができる。すなわち、単体を見る視点の角度を水平軸を中心に上下に(θ だけ)、垂直軸を中心に左右に

(ϕ だけ)回転したり、その視点の下で対象の単体を平面(画面)に垂直な法線を軸として時計回り・反時計回りに(表示角度だけ)回転できるようにした。なお、視点の回転モード機能($f \cdot 4$ キー)を使って視点の位置を変化させて単体を見やすくするようにできる。(この機能は最小化問題を扱うときに役立つ。)また、すでに説明したが、線画モード($f \cdot 5$ キー)を使うと図形が線画で表示されるので、カラー対応でないプリンタでも見やすいハードコピ

ー($f \cdot 2$ キー)がとれる。

4. 単体表

4.1 2段階単体表

例題1の入力が終了している、すなわち、係数表が完成しているでしょう。

初期メニュー欄から「単体表の操作」を選ぶ。次にサブメニュー欄の「初期単体表の新規作成」に続いて「主問題」を選ぶと表3のような出発基底形式をした初期単体表が表示される。ここでスラック変数SA, SB, SCは自動的に導入される。次に「単体表の実行」を選ぶとトレースするか否かを聞いてくる。もしNOと応えれば一気に単体表が実行されて最適解が求まる(表4)。もしYESと応えれば、メニュー欄が1:1ステップ実

表 3 例題1の初期単体表

2段階単体表 第2段階(主問題)		単 体 表					STEP 0
基底	OA	A	B	SA	SB	SC	右 辺
(OA)	1.0	-6.000	-7.000	0.000	0.000	0.000	0.000
SA	0.0	2.000	1.000	1.000	0.000	0.000	60.000
SB	0.0	2.000	5.000	0.000	1.000	0.000	100.000
SC	0.0	0.000	4.000	0.000	0.000	1.000	60.000

(単体表の操作) 1. 初期単体表の新規作成 2. 単体表の実行
3. 表データの消去 [STOP] 初期メニュー
機能を選択して下さい。→

表 4 例題1の最終単体表

2段階単体表 最適解(主問題)		単 体 表					
基底	OA	A	B	SA	SB	SC	右 辺
(OA)	1.0	0.000	0.000	2.000	1.000	0.000	220.000
SC	0.0	0.000	0.000	1.000	-1.000	1.000	20.000
A	0.0	1.000	0.000	0.625	-0.125	0.000	25.000
B	0.0	0.000	1.000	-0.250	0.250	0.000	10.000

(単体表の操作) 1. 初期単体表の新規作成 2. 単体表の実行
3. 表データの消去 [STOP] 初期メニュー
機能を選択して下さい。→
単体表は最適解です。

表 5 例題 1 の最適解の表示

主問題の最適解	繰返し回数	第1段階	0	回
目的関数値	OA = 220.000	第2段階	3	回
変数名	変数値	リデューストコスト	シャドープライス	
A	= 25.000			
B	= 10.000			
SA	= 0.000		2.000	
SB	= 0.000		1.000	
SC	= 20.000			

頂点番号 = 1 : A = 22.500
 B = 15.000
 目的関数値 OA = 240.000

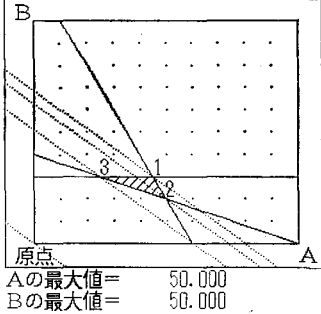


図 7 例題 3 の図解法

行, 2 : 比の計算, 3 : 右辺の表示, 4 : ピボットの選択, 5 : 連続実行のようになる。

初期単体表ではカーソルが自動的にいわゆる単体判定基準に従うピボットの位置を示すようになっている。そこで「1ステップ実行」を選ぶとピボット演算が行われて単体表が更新される。(このときメニュー欄に「前のステップ」という項目が現われるが、これを使えば1つ前の単体表に戻ることができる。これを「次のステップ」と併用すれば、行きつ戻りつして理解を深めることができる。)カーソルはまた次のピボットの位置を示している。この例題では「1ステップ実行」を3回選ぶと最適解に到達する(表4)。初期メニュー画面に戻って「実行結果の分析」に続いて「最適解の表示」を選ぶと表5が得られる。(ブランク欄は値ゼロである。)このように「1ステップ実行」は、従来教室で行われてきた紙に書かれた単体表を筆算による掃き出し計算で更新してゆく煩わしさ(計算が苦手な学生はこの計算によって確実にLP嫌いになる)から解放するものである。なお、他のメニューの内容は想像していただけたらと思う。

さて、2段階単体法における人為変数の扱い方について説明するために、例題1の制約式2だけを

$$2A + 5B \geq 100 \text{ (制約式2')}$$

のように不等号の向きを逆にした問題(これを例題3とする)を考えよう。

問題を入力してから(初期メニューの「ファイル入出

力)により、例題1をファイルから取り出して「主問題の作成/修正」を選んでから新規作成でないことを指定すると例題1の係数表が画面に現われるからカーソルを移動して制約式2の不等号の向きを修正すれば例題3の係数表が得られる)例題1の場合と同様のメニュー選択を行なうと表6が表示される。同表の第2行目OBの行が第1段階計算用の目的関数の係数で、SCとTAの間の列に一記号がついているが、これは画面接続を表わすものであり、画面上でTA列を見るためにはSHIFTと矢印キーを使ってスクロールさせればよい。(切り貼りのときには一列をのりしろとする。)

「単体法の実行」のなかで「1ステップ実行」を2回行なうと第2段階計算に入ったことを示す表7が表示されるので、さらに実行を続けると最適解が得られる。なお、例題3を「図解法」すると図7のようになる。

4.2 ピボットの選択

図3を見ると、原点(頂点番号1)から出発して目的関数値を計算する頂点を1つ隣の頂点へ移動するものとするれば、頂点2, 3, 4と移動するよりは、頂点5へ移

表 6 例題 3 の初期単体表

2段階単体法		第1段階(主問題)							単体表		STEP
基底	OA	OB	A	B	SA	SB	SC	-	TA	右辺	
(OA)	1.0	0.0	-6.000	-7.000	0.000	0.000	0.000	-	0.000	0.000	
(OB)	0.0	1.0	-2.000	-5.000	0.000	1.000	0.000	-	0.000	-100.000	
SA	0.0	0.0	2.000	1.000	1.000	0.000	0.000	-	0.000	60.000	
TA	0.0	0.0	2.000	5.000	0.000	-1.000	0.000	-	1.000	100.000	
SC	0.0	0.0	0.000	4.000	0.000	0.000	1.000	-	0.000	60.000	

表 7 例題 3 の第2段階計算用単体表

2段階単体法		第2段階(主問題)							単体表		STEP
基底	OA	OB	A	B	SA	SB	SC	TA	右辺		
(OA)	1.0	0.0	0.000	0.000	0.000	-3.000	-2.000	3.000	180.000		
(OB)	0.0	1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000		
SA	0.0	0.0	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000	-1.000	20.000		
A	0.0	0.0	1.000	0.000	0.000	-0.500	-0.625	0.500	12.500		
B	0.0	0.0	0.000	1.000	0.000	0.000	0.250	0.000	15.000		

って頂点4（最適解）へいく方が2ステップで最適解に到達するので計算量が少なくすむことがわかる。これは、ピボット選択の基準を“目的関数の増分値が最大”になるようにした場

合に相当する。単体表による単体法の場合には、サブメニュー「ピボットの選択」により自由にピボットの位置を指定できるのでこういう説明の際に便利である。

5. 感度分析

最適解が得られた時に、基底変数の組合せを変えないで制約式の定数項の値または目的関数の係数の値をどのくらい変化させられるかを調べるためには、「実行結果の分析」に続いて「感度分析(右辺)」または「感度分析(目的関数)」を選べばよい。たとえば例題1の右辺の場合には表8のようになる。

6. ファイル

問題が解け最適解が見つかったら感度分析などを行ない、その結果（最適解・グラフ画面・感度分析結果・係数表および変数・目的関数・制約式の意味等）を「プリンタ出力」によってプリンタに出力することができる。これらを保存したければ「ファイル入出力」を用いて現在作業領域に存在する必要なデータすべてを注釈をつけてフロッピーディスクやハードディスク上のファイルに保存することができる。

保存する場合には、初期メニュー「ファイル入出力」に続いて「全データの退避」を選ぶ。それから問合せに応じて、装置番号（A:, B:, C: 等）とファイル番号を入力する。（1つの装置について最大30ファイルが保存できる。）さらに注釈を入力しておく、後でデータを回復させた時に役に立つ。これですべてのデータが保存されたので、STOPキーを押して初期メニューに戻り、別の問題にとりかかれる。

保存されている問題を再検討する場合には、「ファイル入出力」に続いて「全データの回復」を選び、問合せに応じて装置番号とファイル番号を入力すればよい。

7. 動作環境

本パッケージはPC 9800シリーズ（XA・LTを除く）で使用できる。メモリーは640KB、PC 9801およびPC 9801EについてはJIS第1水準漢字ROMが必要である。ディスプレイはカラーまたはモノクロで640

表8 例題1の感度分析(右辺)

主問題の感度分析(右辺の成分の変化)					
最適解における目的関数値 $OA = 220.000$					
式名	目的関数値	右辺最小値	現在の右辺	右辺最大値	目的関数値
制約式01	180.000	40.000 <	60.000 <	100.000	300.000
制約式02	180.000	60.000 <	100.000 <	120.000	240.000
制約式03	220.000	40.000 <	60.000 <	+無限大	220.000

×400ドットのものを使用し、外部記憶装置としてはフロッピーディスクおよびハードディスクが使用できる。プリンタはPC-PR201シリーズの各機種が使用でき、同シリーズのカラープリンタでカラー印刷もできる。

オペレーティング・システム（OS）は日本語MS-DOSのバージョン2.0以上が必要である。日本語フロントエンドプロセッサと日本語辞書を組み込んでおけば日本語が入力できるようになる。

8. その他

本パッケージは、放送大学演習、日科技連セミナーの他2, 3の大学で使用されている。また、[4]は本パッケージを用いて書かれたものである。

扱える問題のサイズは、本来の変数が30個、制約式が40個であるから、教育用とはいえ実用的な問題もある程度は解くことができる。ただし、タチの悪い問題に対する対処はしていない。

参考文献

- [1] 平本巖, 長谷彰:線形計画法, 培風館, 1973.
- [2] OR演習小委員会編:ORワークブック, 日科技連出版社, 1984.
- [3] 平本巖, 栗原和夫:LP3次元図解法の一表示法, OR学会秋季研究発表会アブストラクト集, 1992, 170-171.
- [4] 平本巖, 木下昌男, 栗原和夫:パソコンパッケージによる例解線形計画法, サイエンス社, 1986.

●事務局インフォメーション

——住所・勤務先変更の届出について(お願い)——

例年、2月から5月にかけては会員の方々の異動が多く、機関誌の未着など連絡不十分による事故が多発いたしております。住所・勤務先等に変更があった場合は、すみやかに学会事務局までご連絡ください。特に、今春学校を卒業・修了される学生会員の方々は、必ず新しい勤務先をご連絡くださるようお願いいたします。