

汎用数理計画ソフトウェア

反町 洋一, 小田 稔周, 熊野 長次郎

1. はじめに

線形計画法で代表される数理計画法の応用が、これまで、産業界でいちじるしく進展できたのは、計算機、特に大型汎用計算機の技術革新に応じて、新しい汎用数理計画ソフトウェアがメーカー等により開発され、産業界へたえず供給され続けたことであろう。メーカー等で開発された数理計画ソフトウェアの共通した特徴は、いずれも1960年代にIBM社により開発されたMPS/360を源流としていることであろう。このために、これらのソ

フトウェアは、基本的な外部仕様および、利用者にとって最もニーズの高い入力データについて互換性が保たれている。このことから、本稿では汎用数理計画ソフトウェアの例としてIBM社のMPX/370を、編集者より与えられた例題を中心に第2章で説明をする。

最近の計算機のダウンサイジングの影響は、この分野でのソフトウェアの利用も、PC、EWS等が中心となっているが、本格的な応用をめざした大規模線形計画問題については、現状では、汎用数理計画ソフトウェアの利用が必要となろう。第3章ではこのような大規模問題の汎用数理計画ソフトウェアでの取扱いについて述べることにする。

そりまち よういち ㈱三菱総合研究所*
 おだ としかね 国際電信電話㈱研究所**
 くまの ちょうじろう ㈱三菱総合研究所***
 * 〒100 千代田区大手町2-3-6
 ** 〒356 埼玉県上福岡市大原2-1-15
 *** 〒530 大阪府北区堂島2-2-2

2. 例題による数理計画ソフトウェアの紹介

例題1：生産計画問題
 LP共通問題（「特集にあたって」参照）に示すように

表1 LP共通問題

含有成分	Cu	Si	Fe	Zn	Mn	Mg	
下限	1.8	10.8	0.8	1.6	0	0.34	
上限	2.2	11.2	0.9	1.8	0.3	0.35	
材料	単価	含有率 (%)					
X 1	275円	1.4	3.3	0.7	1.5	0.2	0.8
X 2	275	2.5	8.0	0.8	4.5	0.2	0.3
X 3	285	2.5	7.7	0.9	0.9	0.18	0.19
X 4	285	2.5	9.5	0.9	0.9	0.18	0.09
X 5	185	2.5	9.3	0.95	0.93	0.18	0.09
X 6	235	2.3	8.4	0.8	3.0	0.21	1.4
X 7	235	2.5	9.0	0.9			
X 8	260	0.2	0.2	0.5		0.5	
X 9	290	98.0					
X 10	340		97	0.5			
X 11	255	4.0	0.5	0.5	0.1	0.5	0.5

表2 数理計画法のソフトウェア

分類	ソフト名
ライブラリー	OSLib, NAG, IMSL
パッケージ	MPSX, AMPS, FMPS, NLP-GRG, WISE, FortLP
会話型	LINDO, GINO
モデル記述	LINGO, XPRESS-MP, ASNOP
表計算	EXCEL, What's Best
中間言語	SAS/IML, S, Speakeasy, APL, LAMAX-S
その他	SAS/OR, Mathematica

11個の使用材料を用いてある製品を作る場合、銅をはじめ6種類の成分が表の上下限に入るように使用材料の混合比率を決めたい。X1は使用材料の混合比率を示す。その場合、X1のさらに1.4%だけの銅を含んでいる。ただし、X3は35%にして欲しいとのことである。結果は実行可能解がない。どの制約をゆるめればよいか？

この例題は、以下のように定式化される。

添字：

m…材料の添字

e…成分の添字

定数：

C_m …材料の単価 (円)

$R_{m,e}$ …材料mに含まれる成分eの含有率 (%)

L_e …製品に含まれる成分eの含有率の下限 (%)

U_e …製品に含まれる成分eの含有率の上限 (%)

変数：

x_m …製品を構成する材料mの混合比率

y_e^* …製品に含まれる成分eの含有率 (%)

ただし、 $-\infty < y_e^* < +\infty$

y_e …製品に含まれる成分eの含有率 (%)

ただし、 $L_e \leq y_e \leq U_e$

δy_e^+ …製品に含まれる成分eの含有率の上限逸脱率 (%) ただし、 $\delta y_e^+ \geq 0$

δy_e^- …製品に含まれる成分eの含有率の下限逸脱率 (%) ただし、 $\delta y_e^- \geq 0$

定式化：

線形計画問題の定式化では、特に大規模問題においては、実行不可能にならないように留意すべきであろう。大規模問題において実行不可能な場合、数理計画法のソフトウェアは、実行不可能な状態の解を出力するが、この理由を解析し対策を講ずるために、分析者は多くの時間と労力を費すことになる。

この例題では、 $y_e = \sum_m R_{m,e} x_m$ の制約を設定した場合、

実行不可能となる場合があり、 x_m が負値と出力される恐れがある。こうなっては対策に窮することになる。

このような理由から、ここではあらかじめ、補助変数 y_e^* 、 δy_e^+ 、 δy_e^- を導入し、実行不可能を防止する。

すなわち、 $y_e^* = -\delta y_e^- + y_e + \delta y_e^+$ 、 $y_e^* = \sum_m R_{m,e} x_m$

とし、目的関数に、図1に示す罰金関数

$$f(y_e^*) = M_c \delta y_e^- + M_c \delta y_e^+$$

を含めることとする。

この凸計画問題は、以下のように線形計画問題に定式

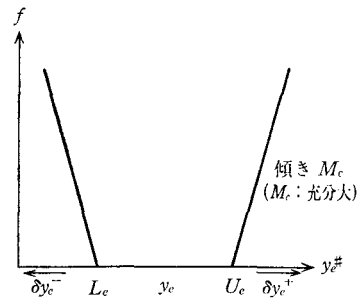


図1 罰金関数 $f(y_e^*)$

化される。

$$\min \quad ① \quad \sum_e M_c y_e^- + \sum_e M_c \delta y_e^+ + \sum_m C_m x_m$$

…罰金関数 $\sum_e f(y_e^*)$ + 製品単価

を最小化する。 $M_c = 10000$ とする。

$$\text{s.t.} \quad ② \quad \sum_m x_m = 1$$

…混合比率の総和は、1である。

$$③ \quad y_e^* - \sum_m R_{m,e} x_m = 0 \quad \text{for } \forall e$$

…成分eの含有率 y_e^* の定義式

$$④ \quad y_e^* + \delta y_e^- - y_e - \delta y_e^+ = 0 \quad \text{for } \forall e$$

… y_e^* の内訳を示す式

$$⑤ \quad L_e \leq y_e \leq U_e \quad \text{for } \forall e$$

…成分eの含有率 y_e の上下限制約

$$⑥ \quad x_3 = 0.35$$

…材料m=3の混合比率を0.35とする要求

表1は、この問題を生成し、汎用線形計画ソフトウェア **MPS X/370**[1][2]を用いて、IBM社の大型計算機上で解くためのジョブ・ストリームである。

表中の step 1 の問題生成は、筆者らが開発したマトリクス・ジェネレータ **MCC.MG**[3]を使用している。MGの文法の詳細がわからずとも、上記の定式化と素直に対応していることは一目瞭然である。

MGはMPS形式のデータを出力し、次のstep 2ではこのデータを受けて、MPS X/370が最適化を行ない、解を出力する。

MPS X/370は、計算機資源を最大限に利用し、有効な最適化戦略が構築できるように、プロシージャと呼ばれる機能単位を制御言語から呼び出す形式を採用している。表1で使用しているプロシージャの機能を概説する。

CONVERT…MPS形式データの入力処理を行なう。

SETUP…計算効率を最大化するように計算機資源

表 1 LP共通問題を解くための入力データ

```

//      ( JOB CARD )
//STEP1 EXEC SMG
//MG.SYSIN DD *
5      PPP      5      PPP
DATA.  MODEL,PPP,DATA
      *
      * --- LINEAR PROGRAMMING ---
      *
      *      EX. PRODUCTION PLANNING
      *
MATERIAL LIST,MSUFIX,2,11A3
      01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11 --- 材料の添字mのシンボル・リスト
      END
ELEMENT  LIST,ESUFIX,2,6A3
      CU SI FE ZN MN MG --- 成分の添字eのシンボル・リスト
      END
MATERIAL CONST,COST,1,MSUFIX,OPTCD=1,11A5 --- 材料単価 Cm: COSTm
COST     275. 275. 285. 285. 185. 235. 235. 260. 290. 340. 255.
      END
COMPOUND CONST,CRATIO,2,ESUFIX,MSUFIX,OPTCD=1,6A6,MASK=CR_MS
RATIO   #CU  SI  FE  ZN  MN  MG
X01     1.4  3.3  0.7  1.5  0.2  0.8
X02     2.5  8.0  0.8  4.5  0.2  0.3
X03     2.5  7.7  0.9  0.9  0.18 0.19
X04     2.5  9.5  0.9  0.9  0.18 0.09
X05     2.5  9.3  0.95 0.93 0.18 0.09
X06     2.3  8.4  0.8  3.0  0.21 1.4 --- 含有率 Rme: CRATIOe,m
X07     2.5  9.0  0.9
X08     0.2  0.2  0.5          0.5
X09     98.0
X10          97.0 0.5
X11     4.0  0.5  0.5  0.1  0.5  0.5
      END
LO_BOUND CONST,LOELM,1,ESUFIX,OPTCD=1,6A6
OF ELM.  1.8  10.8 0.88 1.6  0.0  0.34 --- 含有率の下限 Le: LOELMe
      END
UP_BOUND CONST,UPELM,1,ESUFIX,OPTCD=1,6A6
OF ELM.  2.2  11.2 0.9  1.8  0.3  0.35 --- 含有率の上限 Ue: UPELMe
      END
ENDMODEL
INSTRUCT. MODEL,PPP,INSTRUCTION 変数名... Xm: Xm, ye#: Ye#, ye: Ye
MATRIX  δye-: DYME, δye+: DYPE
MIN...  -1- COST FUNCTION
      N, 'COST', '10000.0' * 'DYM'ESUFIX
      + '10000.0' * 'DYP'ESUFIX --- 目的関数①
      + COST * 'X'MSUFIX          (罰金関数+製品単価)
S.T.  -2- TOTAL COMPOUND RATIO EQ. 1
      E, 'TOTAL#R',
      + '1.0' * 'X'MSUFIX, --- 制約②
      + '1.0' * 'RHS'          (混合比率の総和=1.)
      -3- DEFINE SUM OF ELEMENT
      E, 'DEFS#ESUFIX',
      + '1.0' * 'Y#ESUFIX --- 制約③
      - CRATIO * 'X'MSUFIX.(ESUFIX)|CR_MS (成分eの含有率 ye#
      の定義式)
      -4- DEFINE COMPONENT OF 'YE'ESUFIX
      E, 'COMPY'ESUFIX,
      + '1.0' * 'Y#ESUFIX --- 制約④
      + '1.0' * 'DYM'ESUFIX
      - '1.0' * 'Y'ESUFIX
      - '1.0' * 'DYP'ESUFIX (ye#の内訳を示す式)
      END
  
```

表 1 (つづき)

```

BOUND
-5- UPPER LOWER BOUND OF VARIABLE X
  LO , 'Y'ESUFIX , LOELM
  UP , 'Y'ESUFIX , UPELM
-* REQUIREMENT
  LO , 'X03' , '0.35'
  UP , 'X03' , '0.35'
END
ENDMODEL

/*
//STEP2 EXEC MPSXVS,REGION.MPSXE=1000K
//MPSXC.SYSIN DD *
PROGRAM
INITIALZ
MOVE(XDATA,'PPP')
MOVE(XPBNAME,'PPP') } モデル名の指定
CONVERT('CHECK','SUMMARY')
MOVE(XBOUND,'BND') - バウンド
SETUP
MOVE(XOBJ,'COST')
MOVE(XRHS,'RHS')
CRASH
PRIMAL
SOLUTION
EXIT
PEND

/*
//MPSXE.SYSIN DD DSN=*.STEP1.MG.FT07F001,DISP=OLD
//
  
```

--- 制約⑤
(成分2の含有率の上下限)
--- 制約⑥
(材料3の混合比率=0.3)

--- MPSX/370 の制御言語

--- MPS形式のデータが
入る中間ファイル

(主記憶, ファイル)の割付けを行なう。
CRASH...実行可能解を素早く求めるための処理を行なう。(複数アルゴリズムをもつ)
PRIMAL...主単体法により最適化を行なう。

SOLUTION...計算された基底に対する解を出力する。
表1の入力データの実行により得られた最適解を表2に示す。

表 2 LP共通問題の解 (暫定版)

SECTION 1 - ROWS

NUMBER	...ROW..	AT	...ACTIVITY...	SLACK	ACTIVITY
①	-1	COST	BS	635.68402	635.68402-
②	2	TOTAL#R	EQ	1.00000	.
制約③	3	DEFS#CU	EQ	.	.
	4	DEFS#SI	EQ	.	.
A	5	DEFS#FE	EQ	.	.
	6	DEFS#ZN	EQ	.	.
A	7	DEFS#IN	EQ	.	.
	8	DEFS#MG	EQ	.	.
制約④	9	COMPYCU	EQ	.	.
	10	COMPYSI	EQ	.	.
A	11	COMPYFE	EQ	.	.
	12	COMPYZN	EQ	.	.
A	13	COMPYIN	EQ	.	.
	14	COMPYMG	EQ	.	.

21	DYPCU	LL	.	10000.00000
22	DYPFE	LL	.	10000.00000
23	DYPMG	LL	.	10000.00000
24	DYPSI	LL	.	10000.00000
25	DYPSI	LL	.	10000.00000
26	DYPZN	LL	.	10000.00000
27	X01	BS	.17717	275.00000
28	X02	BS	.14473	275.00000
29	X03	EQ	.35000	285.00000
30	X04	LL	.	285.00000
31	X05	BS	.24233	185.00000
32	X06	BS	.04752	235.00000
33	X07	LL	.	235.00000
34	X08	LL	.	260.00000
35	X09	LL	.	290.00000
36	X10	BS	.03824	340.00000
37	X11	LL	.	255.00000
38	Y#CU	BS	2.20000	.
39	Y#FE	BS	.84216	.
40	Y#MG	BS	.34000	.
41	Y#IN	BS	.18098	.
42	Y#SI	BS	10.80000	.
43	Y#ZN	BS	1.60000	.
44	YCU	UL	2.20000	.
45	YFE	LL	.88000	.
46	YMG	LL	.34000	.
47	YIN	BS	.18098	.
48	YSI	LL	10.80000	.
49	YZN	LL	1.60000	.

SECTION 2 - COLUMNS

NUMBER	.COLUMNS	AT	...ACTIVITY...	..INPUT COST..
⑤	15	DYMCU	LL	10000.00000
	16	DYMFE	BS	.03784
⑥	17	DYPMG	LL	10000.00000
	18	DYPSI	LL	10000.00000
⑦	19	DYPSI	LL	10000.00000
	20	DYPZN	LL	10000.00000

表 3 FEの含有率の下限緩和後の最適解

	X01	X02	X03	X04	X05	X06	X07	X08	X09	X10	X11
混合率	6.4	13.7	35.0	0.0	24.9	11.4	0.0	4.6	0.0	4.0	0.0

(%)

この結果から、 δy_e^+ 、 δy_e^- で正の値をとるものを探せば、 δy_3^- (FE成分の含有率の下限逸脱率)のみが、0.03784 (%)をもつことがわかる。したがって、答は、FEの含有率の下限を0.04 (%) (小数以下2桁) ゆるめればよい。FEの含有率の下限 L_3 を0.88から0.84に変更し、再度表1の入力データを実行すれば表3に示す解が得られる。

この時の製品単価は、253.5円となる。

なお、IBM社のMPSX/370と同様に、大型計算機上で稼動する線形計画ソフトウェアとして、富士通社のAMP S、UNISYS社のFMPSが挙げられる。

これらのソフトウェアは、大規模問題でも効率よく解くことができる反面、大型計算機上で稼動するため、ユーザ・インターフェースが立ち遅れている。

近年、EWS (エンジニアリング・ワークステーション) の性能が飛躍的に向上しており、今後は、図2で示す形態で利用されることが主流となると予想される。

ここでは、マトリクス・ジェネレータによるモデルの構築、制約式の展開リストによるモデルのチェック、最適化の実行、解のチェックといった基本作業を同期して

進行させることができる。

例題2：2次計画問題

次の2次計画問題の最適解を求めよ。

$$\min \textcircled{1} \quad x^t \begin{pmatrix} 3.0 & 1.0 & -0.5 \\ 1.0 & 2.0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.4 & 1.0 \end{pmatrix} x \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

s.t. $\textcircled{2} \quad -1.3x_1 - 1.2x_2 - 1.08x_3 + 1.12 \leq 0$
 $\textcircled{3} \quad x_1 + x_2 + x_3 - 1.0 = 0$
 $\textcircled{4} \quad x_1 \leq 0.75, x_2 \leq 0.75, x_3 \leq 0.75$

この問題は、非線形計画法のソフトウェアを用いて解くことができる。表4に、三菱総合研究所で開発したNLP-GRG[4]を用いて解くための入力データを掲げる。

表5を実行することにより得られた最適解を表5に示す。

一般に、非線形計画法のソフトウェアは、変数の数、制約式の数ともに100程度以下の小規模問題を対象としたものが多い。

以下では、大規模2次計画問題を線形計画問題にもち込んで解く方法について述べる。

一般的に、2次計画問題は以下のように定式化される。

$$\min \quad x^t Qx$$

$$\text{s.t.} \quad Ax = b \quad (1)$$

$$l \leq x \leq u$$

方法1：

Problem Data for Request					NPLMISE/11/3/0/1				
+ -0.80000E+00(X06) + -0.90000E+00(X07) + -0.50000E+00(X08) + 0.10000E+01(Y#FE)					DATA. MODEL, PPP, DATA				
NUMBER OF ELEMENTS : 11					* --- Linear Programming ---				
EQUATION : 10 DEFS#MG =					* ex. Production Planning				
+ -0.80000E+00(X01) + -0.30000E+00(X02) + -0.19000E+00(X03) + -0.14000E+01(X06) + -0.50000E+00(X11) + 0.10000E+01(X08)					* MATERIAL LIST, MSUFIX, 2, 11A3				
NUMBER OF ELEMENTS : 8					* SUFFIX. 01 02 03 04 05 06 07 08 09 10 11				
EQUATION : 11 DEFS#MN =					* END				
+ -0.20000E+00(X01) + -0.20000E+00(X02) + -0.18000E+00(X03) + -0.21000E+00(X06) + -0.50000E+00(X08) + -0.50000E+00(X08)					* ELEMENT LIST, ESUFIX, 2, 6A3				
NUMBER OF ELEMENTS : 9					* SUFFIX. CU SI FE ZN MN MG				
EQUATION : 12 DEFS#SI =					* END				
+ -0.33000E+01(X01) + -0.80000E+01(X02) + -0.77000E+01(X03) + -0.84000E+01(X06) + -0.90000E+01(X07) + -0.20000E+01(X08)					* MATERIAL CONST, COST, 1, MSUFIX, OPTCD=1, 11A6				
NUMBER OF ELEMENTS : 11					* COST 275.0 275.0 285.0 285.0 185.0 235.0				
EQUATION : 13 DEFS#ZN =					* END				
+ -0.15000E+01(X01) + -0.45000E+01(X02) + -0.90000E+00(X03) + -0.30000E+01(X06) + -0.10000E+00(X11) + 0.10000E+01(X08)					* COMPOUND CONST, CRATIO, 2, ESUFIX, MSUFIX, OPTCD=				
NUMBER OF ELEMENTS : 8					* RATIO. *CU SI FE ZN MN MG				
NUMBER .CC					X01 1.4 3.3 0.7 1.5 0.2 0.8				
					X02 2.5 8.0 0.8 4.5 0.2 0.3				
					X03 2.5 7.7 0.9 0.9 0.18 0.19				
					X04 2.5 9.5 0.9 0.9 0.18 0.09				
					X05 2.5 9.3 0.95 0.93 0.18 0.09				
					X06 2.3 8.4 0.8 3.0 0.21 1.4				
					X07 2.5 9.0 0.9				
					X08 0.2 0.2 0.5 0.5				
12 0.6356078E+03 0.000000E+00 0.635608E+03 0.14					15 DYMCU LL 0.00000 10000.00000				
13 0.6356677E+03 0.000000E+00 0.635668E+03 0.63					16 DYMFE BS 0.03784 10000.00000				

図2 EWS上での線形計画法の利用形態

表 4

```

//      ( JOB CARD )
//GRG   EXEC FORTXCLG,REGION.GO=512K,TIME.GO=1
//FORT.SYSIN DD *
C      --- QUADRATIC PROGRAMMING ---
C      REAL FUNCTION OBJ*( X,N )
C
C      REAL*8      X(N),X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3
C
C      X1 = X(1)
C      X2 = X(2)
C      X3 = X(3)
C
C      Y1 = 3.0*X1 + 1.0*X2 - 0.5*X3
C      Y2 = 1.0*X1 + 2.0*X2 - 0.4*X3
C      Y3 = -0.5*X1 - 0.4*X2 + 1.0*X3
C
C      OBJ = X1*Y1 + X2*Y2 + X3*Y3
C
C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE CONST ( G,X,M,N )
C
C      REAL*8      G(M),X(N),X1,X2,X3
C
C      X1 = X(1)
C      X2 = X(2)
C      X3 = X(3)
C
C      G(1) = - 1.3*X1 - 1.2*X2 - 1.08*X3 + 1.12
C      G(2) = X1 + X2 + X3 - 1.0
C      G(3) = X1 - 0.75
C      G(4) = X2 - 0.75
C      G(5) = X3 - 0.75
C
C      RETURN
C      END
/*
//LKED.ADDLMOD DD DISP=SHR,DSN=NLPGRG.LOAD
//LKED.SYSIN DD *
INCLUDE ADDLMOD(GRGO)
ENTRY MAIN
/*
//GO.SYSIN DD *
&PARM
XN      = 3, --- 変数の数 3
XM      = 5, --- 制約式の数 5
XFEAS   = 1, --- 初期解が実行不可能な場合、可能解を求める処理を
                行うためのパラメータ指定
&END
*CONST
1 LE
2 EQ
3 LE ---  $g_1(x) \leq 0, g_2(x) = 0, g_3(x) \dots g_5(x) \leq 0$ 
4 LE (LE) (EQ) (LE)
5 LE
*INIT
1 0.0
2 0.0 ---  $x = D$  を初期解とする。
3 0.0
/*
//

```

$$y = \begin{pmatrix} 3.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 2.0 & -0.4 \\ -0.5 & -0.4 & 1.0 \end{pmatrix} x$$

OBJ = $x^T y$... 目的関数

制約式 ②~⑤の定義

制約式 $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_5(x) \end{pmatrix}$

表 5

*** SOLUTION INFORMATION ***

** NLP PROGRAM HAS FOUND AN OPTIMAL POINT.

```

NUMBER OF ITERATIONS IS      2          USED CPU TIME IS      0.02 (SEC)
FINAL OBJECTIVE VALUES IS   0.41737    --- 最小目的関数値
FINAL VALUES OF VARIABLES ARE
1 0.15486  2 0.25024  3 0.59490 --- 最適解 x の値
INDICIES OF BINDING CONSTRAINTS ARE      2
FINAL VALUES OF CONSTRAINTS ARE
1 -2.40983E-02  2 1.90226E-08  3 -0.59514  4 -0.49976  5 -0.15510
FINAL VALUES OF GRADIENT ARE
1 0.83475  2 0.83475  3 0.83475
NUMBER OF OBJECTIVE FUNCTION CALLS IS    11

```

対称行列 Q を変形コレスキー (root free cholesky) 分解し, $Q=U^t D U$ を得る. ただし, U は上半三角行列, D は対角行列である.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

$y=Ux$ とすれば, 問題(1)は以下のように書き換えることができる.

$$\min y^t D y = \sum_j d_j y_j^2$$

$$\text{s.t. } y - Ux = 0$$

$$Ax = b \quad (2)$$

$$l \leq x \leq u$$

$\forall d_j \geq 0$ の時は, 凸計画問題となり, y_j^2 を図3のように折れ線近似し, 線形計画法で解くことにより最小解が得られる.

方法2:

対称行列 Q の固有値 λ_j と固有ベクトル P_j を求める.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad P = (P_1 \dots P_n) \text{ とすれば,}$$

P は直交行列であり, $P^t Q P = A$ が成立する.

$x = P y$ とすれば, $x^t Q x = y^t P^t Q P y = y^t A y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ が得られる.

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq \lambda_{m+1} \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ とし, $\sum_{j=1}^m \lambda_j \approx \text{tr } Q$

の場合, $x^t Q x \approx \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j^2$ と近似できる. $y_j = P_j^t x$ より,

$y' = (y_1 \dots y_m)^t$, $P' = (P_1 \dots P_m)$ とすれば, $y' = P'^t x$ となり, 問題(1)は以下のように近似することができる.

$$\min y'^t A' y' = \sum_{j=1}^m \lambda_j y_j^2$$

$$\text{s.t. } y' - P'^t x = 0$$

$$Ax = b \quad (3)$$

$$l \leq x \leq u$$

Q が相関行列の場合, $\lambda_1 \dots \lambda_m, P_1 \dots, P_m$ は主成分分析を行なうことにより得られる.

Q が大規模の場合, m は n と比較してきわめて少なくてすむ.

この他, 目的関数が分散を与え, サンプル数が変数の数よりいちじるしく少ない場合は, 投資分析における今野氏の方法[5]のように省計算時間化された巧妙な方法がある.

以下では, 例題2を方法2で解くことを試みる.

Q をヤコビ (Jacobi) の方法で, 固有値分解する.

$$P^t Q P = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 3.7643 & & 0 \\ & 1.3924 & \\ 0 & & 0.84328 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0.82513 & -0.55308 \\ 0.51852 & 0.82236 \\ -0.22428 & -0.13354 \\ 0.11519 \\ 0.23423 \\ 0.96533 \end{pmatrix} \text{ と求まる.}$$

$$\text{目的関数 } x^t Q x = \sum_j \lambda_j y_j^2,$$

$x = P y$ を図3のように折れ線近似を行なう. すなわち,

$$y_j = y_j^+ - y_j^-, \quad y_j^+ \geq 0,$$

$$y_j^- \geq 0 \quad (4)$$

$$y_j^+ = \sum_s y_{sj}^+ \quad 0 \leq y_{sj}^+ \leq \delta_{sj}$$

$$s = 1, \dots, \bar{s} - 1$$

$$0 \leq y_{\bar{s}j}^+ \quad (5)$$

$$y_j^- = \sum_s y_{sj}^- \quad 0 \leq y_{sj}^- \leq \delta_{sj} \quad s = 1, \dots, \bar{s} - 1$$

$$0 \leq y_{\bar{s}j}^- \quad (6)$$

$$y_j^2 \approx z_j = \sum_s C_{sj} y_{sj}^+ + \sum_s C_{sj} y_{sj}^- \quad (7)$$

ただし, $C_{sj} = \{(y_{s-1}^v + \delta_{sj})^2 - y_{s-1}^{v2}\} / \delta_{sj} = 2y_{s-1}^v + \delta_{sj}$

$$y_s^v = y_{s-1}^v + \delta_{sj} \quad (y_0^v = 0) \text{ for } s = 1, \dots, \bar{s}$$

であり, 折れ線区間の傾きを表わす. $C_{sj} < C_{s+1j}$

以上の準備の後, 例題2は表6に示すように, 線形計画問題として定式化される.

この解は, 例題2の近似解であり, 解の精度は分割 s の取り方に依存する. 表6の問題は, 例題1と同様に M P S X / 370 を用いて解くことができるが, 分割 s を改訂しながら近似の精度を高める必要があるため, より簡便に EWS 上で利用可能な線形計画ソフトウェア W I S E [3][6] を用いて解いた. W I S E はブロック構造をもつ大規模問題を解くために, KDD 研究所と三菱総合研究所で共同開発した内点法のソフトウェアである. 表7にその実行ログと計算結果を示す.

この時, $y = (0.1, 0.0, 0.67546)^t$ となる. 解の精度を高めるため, この付近の分割を細かくし, 再計算を行なった結果を表8に掲げる.

この結果, $y = (0.12, 0.04, 0.65430)^t$ となる. さらにこの付近を細分化した結果を表9に掲げる.

この結果, 目的関数の変化が十分小さくなったので,

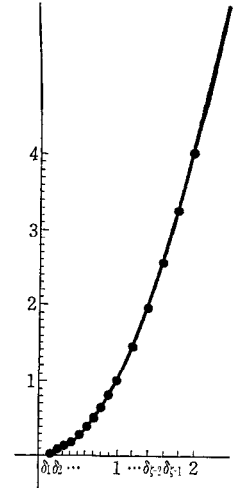


図3 $f(y) = y^2$ の折れ線近似

表 6 例題 2 の LP モデル生成のための入力データ

```

DATA.  MODEL, QUADRA, DATA
*
* --- Quadratic Programming ---
*
* min.  x'Vx      V: non-negative definite,  x': transposed x  / c4
* s.t.  Ax = b
*       1 < x < u
*
* -- Approximate by Convex Separable programming --
*
* L: eigen values (non-negative diagonal matrix)
* P: eigen vectors (orthogonal matrix)
*
* x = Py,  xVx = (Py)'V(Py) = y'(P'VP)y = y'Ly
*
* Approximate as follows.
* z = y'y  ---->  y = y+ - y-  (y+ > 0, y- > 0)
*                 y+ = y+(1) + ... + y+(s)
*                 y- = y-(1) + ... + y-(s)
*                 z = c1*y+(1) + ... + cs*y+(s)
*                   + c1*y-(1) + ... + cs*y-(s)  / c1 /
*                 ( c1 < ... < cs )          */-----+-----+----> y+
*                                     y+(1),...y+(s-1),y+(s)
*
* then,
*
* min.  e'Lz
*       ( e = (1,...,1)' )
* s.t.  z - c1*y+(1) - ... - cs*y+(s) - c1*y-(1) - ... - cs*y-(s) = 0
*       y+ - y+(1) - ... - y+(s) = 0
*       y- - y-(1) - ... - y-(s) = 0
*       y - y+ + y- = 0
*       x - Py = 0
*       Ax = b
*       0 < y+(s) < us(s)
*       0 < y-(s) < us(s)
*       1 < x < u
*
* --- VARIABLE X SECTION ---
VAR. X  LIST, XSUFFIX, 1, 3A2
SUFFIX. 1 2 3
END
RESTRICT1 CONST, REST1, 1, XSUFFIX, OPTCD=1, 3A9
COEFF. 1.3 1.2 1.08
END
VAL. X UP CONST, XUP, 1, XSUFFIX, OPTCD=1, 3A9
        0.75 0.75 0.75
END
* --- VARIABLE Y SECTION ---
VAR. Y  LIST, YSUFFIX, 1, 3A2
SUFFIX. 1 2 3
END
EIGEN   CONST, EG#VAL, 1, YSUFFIX, OPTCD=1, 3A9
VALUES 3.7643 1.3924 0.84328
END
EIGEN   CONST, EG#VEC, 2, YSUFFIX, XSUFFIX, OPTCD=1, 3A9
VECTORS Y 1 Y 2 Y 3
        X 1 0.82513 0.55308 0.11519
        X 2 0.51852 0.82236 0.23423
        X 3 -0.22428 -0.13354 0.96533
END
* --- VARIABLE Y(S) SECTION ---
SUBDIVIDE LIST, SUBDIV, 1, 16A2
SUFFIX 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F G
END
VAL. Y(S) CONST, YSUP, 2, SUBDIV, YSUFFIX, OPTCD=1, 16A4, MASK=YSUP_MS
UP Y 1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2
Y 2 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2
Y 3 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.2 0.2 0.2 0.2 0.2
END
APPROX. CONST, CQUADRA, 2, SUBDIV, YSUFFIX, OPTCD=3
COEFF.  QUADRA = QUADRA(SUBDIV, YSUP)
END
ENDMODEL
    
```

--- 変数 x の添字 i のシンボル・リスト

--- 制約 ① の係数: REST1_i

--- 変数 x_i の上限値: XUP_i

--- 変数 y の添字 j のシンボル・リスト

--- 行列 Q の固有値 λ_j: EG#VAL_j

--- 固有ベクトル P_{ij}: EG#VEC_{ij}

--- 折れ線近似の分割の添字 s のシンボル・リスト

--- y_j の分割幅 δ_{sj}: YSUP_{sj}

--- 分割区間の傾き C_{ij}: CQUADRA_{sj} (ユーザー関数)

表 6 (つづき)

INSTRUCT. MODEL, QUADRA, INSTRUCTION MATRIX	
MIN... -1- COST FUNCTION	---
N, 'COST', EG#VAL * 'Z' YSUFIX	目的関数 $\sum \lambda_i z_i$
S.T. -2- QUADRATIC PART APPROXIMATION	
E, 'QUADZ' YSUFIX,	&
+ '1.0' * 'Z' YSUFIX	&
- CQUADRA * 'YP' SUBDIV. YSUFIX	---
- CQUADRA * 'YM' SUBDIV. YSUFIX	z_i の定義式
-3- DEFINE 'YP' YSUFIX	
E, 'DEFYP' YSUFIX,	
+ '1.0' * 'YP' YSUFIX	
- '1.0' * 'YP' SUBDIV. YSUFIX	$(z_i = \sum C_{ij} y_{ij}^+ + \sum C_{ij} y_{ij}^-)$ &
-4- DEFINE 'YM' YSUFIX	
E, 'DEFYM' YSUFIX,	
+ '1.0' * 'YM' YSUFIX	
- '1.0' * 'YM' SUBDIV. YSUFIX	---
-5- DEFINE 'Y' YSUFIX	y_i^+ と y_i^- の関係式 &
E, 'DEFY' YSUFIX,	
+ '1.0' * 'Y' YSUFIX	
- '1.0' * 'YP' YSUFIX + '1.0' * 'YM' YSUFIX	$(y_i^+ = \sum y_{ij}^+)$ &
-6- DEFINE 'X' XSUFIX	
E, 'DEFX' XSUFIX,	
+ '1.0' * 'X' XSUFIX	
- EG#VEC * 'Y' YSUFIX	---
-7- RESTRICTION 1	$(y_i^- = \sum y_{ij}^-)$ &
G, 'RESTRI1',	
+ REST1 * 'X' XSUFIX,	
+ '1.12' * 'RHS'	---
-8- RESTRICTION 2	$x = P$ &
E, 'RESTR2',	
+ '1.0' * 'X' XSUFIX,	
+ '1.0' * 'RHS'	---
BOUND	
-9- UPPER BOUND OF SUBDIVIDED VARIABLES	for $\forall_i (i \neq \bar{i})$
UP, 'YP' SUBDIV. YSUFIX YSUP_MS, YSUP	---
UP, 'YM' SUBDIV. YSUFIX YSUP_MS, YSUP	$0 \leq y_{ij}^+ \leq \delta_{ij}$
-10- UPPER BOUND OF VARIABLE X	$0 \leq y_{ij}^- \leq \delta_{ij}$
LO, 'Y' YSUFIX, '-100.'	---
UP, 'Y' YSUFIX, '100.'	$-M \leq y_i \leq M$ (M充分大)
UP, 'X' XSUFIX, XUP	---
ENDMODEL	$x_i \leq 0.75$

表 7 例題 2 を解くための WISE の実行ログと計算結果

```

*****
**
** Linear Programming Code " WISE "
** Used Interior Point Algorithm
** (for single cpu)
**
** - Dual-affin by I. Adler & N. Kararmarkar
** - 2D-search by Iri, Imai & Yamashita
**
*****
Enter the name of data : or2
          アルゴリズムは、伊理・今村、
          山下の野金関数法を使用
☆ Input model    >> or2
☆ Output solution >> solution
☆ Algorithm       >> 2D_search by Iri, Imai & Yamashita
☆ Dgl block structure >> Sparse (minimum degree)
☆ Control parameter >>
          PINF : 0.100E+11
          XTOLV : 0.100E-03
          XTOLV2 : 0.100E-14
          XTOLPV : 0.100E-09
          XTOLRL : 0.100E-07
          XGAMMA : 0.990E+00
          XNZ : 0.100E+02
          SAVE : 0
          RESTOR : 0
          REVISE : 0
Are you all right !? (y/n) : y
NOW DATA INPUT PROCESS ...
NOW DATA STRUCTURE DESIGNING ...
NOW A_mat * A(t)_mat PROCESS ...
NOW INITIAL SOLUTION CALC PROCESS ...
    
```

表 7 (つづき)

* ITERATION START *						
ITER.	COST(DUAL)	INFEASIBIL	PENALTY COST	ALPHA	BETA	
0	-0.4225325E+04	0.107529E+01	-0.107529E+11	0.1389E-08		
1	-0.4506455E+04	0.155690E+00	-0.155690E+10	0.2586E-11		
2	-0.4554369E+04	0.000000E+00	-0.455437E+04	0.2103E-12		
3	-0.5898267E+02	0.000000E+00	-0.589827E+02	0.5996E-01	0.6447E+00	
4	-0.5356319E+02	0.000000E+00	-0.535632E+02	0.1158E+02	0.7632E+00	
5	-0.5980804E+02	0.000000E+00	-0.598080E+02	-0.1021E+02	0.5319E+00	
6	-0.4495172E+02	0.000000E+00	-0.449517E+02	0.6735E+00	0.2928E+00	
7	-0.3045260E+02	0.000000E+00	-0.304526E+02	0.2939E+01	0.4580E+00	
8	-0.8007092E+01	0.000000E+00	-0.800709E+01	0.1370E+02	0.2380E+00	
9	-0.5943959E+01	0.000000E+00	-0.594396E+01	0.2292E+01	0.5946E+00	
10	-0.3454606E+01	0.000000E+00	-0.345461E+01	-0.7352E+01	0.1754E+01	
11	-0.8328928E+00	0.000000E+00	-0.832893E+00	-0.5641E+01	0.9305E+00	
12	0.1178728E+00	0.000000E+00	0.117873E+00	0.2808E+02	0.2892E+00	
13	0.3135652E+00	0.000000E+00	0.313565E+00	0.3057E+02	0.2028E-01	
14	0.3841493E+00	0.000000E+00	0.384149E+00	0.2849E+02	0.6590E-01	
15	0.4159705E+00	0.000000E+00	0.415970E+00	0.1995E+02	0.5795E+00	
16	0.4219488E+00	0.000000E+00	0.421949E+00	0.1452E+02	0.5604E+00	
17	0.4237600E+00	0.000000E+00	0.423760E+00	0.1102E+02	0.7945E+00	
18	0.4238551E+00	0.000000E+00	0.423855E+00	0.1072E+02	0.3930E+00	
19	0.4239386E+00	0.000000E+00	0.423939E+00	0.1047E+02	0.7801E+00	
20	0.4239452E+00	0.000000E+00	0.423945E+00	0.1047E+02	0.4950E+00	
21	0.4239488E+00	0.000000E+00	0.423949E+00	0.1047E+02	0.7302E+00	
22	0.4239493E+00	0.000000E+00	0.423949E+00	0.1047E+02	0.6282E+00	
23	0.4239495E+00	0.000000E+00	0.423949E+00	0.1045E+02	0.6800E+00	
24	0.4239495E+00	0.000000E+00	0.423950E+00	0.1033E+02	0.6708E+00	

表 7 (つづき)

```

SOLUTION (OPTIMAL) --- EXACT
TIME = 0.15 MINS. ITERATION NUMBER = 25

...NAME...          ...ACTIVITY...      ..DEFINED AS.....
FUNCTIONAL          0.423950          COST
RESTRAINTS          COST
RHS

SECTION 2 - COLUMNS
NUMBER .COLUMN. AT ...ACTIVITY... ..INPUT COST.. ..LOWER LIMIT.
x: 19 X1 BS x = 0.16032 0.00000 0.00000
    20 X2 BS 0.21007 0.00000 0.00000
    21 X3 BS 0.62962 0.00000 0.00000
y: 22 Y1 BS y = 0.10000 0.00000 -100.00000
    23 Y2 BS 0.00000 0.00000 -100.00000
    24 Y3 BS 0.67546 0.00000 -100.00000
    
```

細分化の反復を停止した。この解は、表5のNLPGRGの解とよく一致している。

以上の例題を通して、紹介したソフトウェア（これらは筆者らの必需品である。）の一覧を表10に示す。

3. 大規模線形計画問題の取扱い

大規模線形計画問題の一般的な定義は存在しないが経験的にみて、線形計画モデルのデータ作成、および運用管理、さらには最適化計算の難易度などからみれば、制約式数が、数千以上のモデルを大規模線形問題とすることは応用上実的であろう。このようなモデルでは、応用を進める上で、モデルの大規模化に起因する上述した多くの問題が発生する。

大規模線形計画問題においてこれらの問題を解決し、与えられた課題に対して解を得るためには、まずデータ作成時に、2章の例題1、表1で説明したように「マトリクス・ジェネレータ」を使用することが必要な要件となろう。これによりデータ作成に費やす分析者の時間と

表 8 分割精度を向上させた時の近似解

```

VAL. Y(S) CONST. YSUP. 2, SUBDIV. YSUFIX. OPTCD=1, 8A5, MASK=YSUP_MS
UP Y 1 0.02 0.02 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01
    0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02
Y 2 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01
    0.01 0.01 0.01 0.02 0.02 0.02 0.02
Y 3 0.6 0.02 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.01
    0.01 0.01 0.01 0.01 0.01 0.02 0.02
END

NUMBER ...ROW.. AT ...ACTIVITY... SLACK ACTIVITY ..LOWER LIMIT.
1 COST BS 0.41747 -0.41747 NONE

NUMBER .COLUMN. AT ...ACTIVITY... ..INPUT COST.. ..LOWER LIMIT.
19 X1 BS x = 0.15226 0.00000 0.00000
20 X2 BS 0.24837 0.00000 0.00000
21 X3 BS 0.59936 0.00000 0.00000
22 Y1 BS y = 0.12000 0.00000 -100.00000
23 Y2 BS 0.04000 0.00000 -100.00000
24 Y3 BS 0.65430 0.00000 -100.00000
    
```

表 9 さらに分割精度を向上させた時の近似解

```

VAL. Y(S) CONST. YSUP. 2, SUBDIV. YSUFIX. OPTCD=1, 8A6, MASK=YSUP_MS
UP Y 1 0.1 0.01 0.002 0.002 0.001 0.001 0.001 0.001
    0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.002
Y 2 0.02 0.01 0.002 0.002 0.001 0.001 0.001 0.001
    0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.002
Y 3 0.6 0.05 0.002 0.001 0.001 0.001 0.001 0.001
    0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.001 0.002
END

NUMBER ...ROW.. AT ...ACTIVITY... SLACK ACTIVITY ..LOWER LIMIT.
1 COST BS 0.41737 -0.41737 NONE

NUMBER .COLUMN. AT ...ACTIVITY... ..INPUT COST.. ..LOWER LIMIT.
19 X1 BS x = 0.15594 0.00000 0.00000
20 X2 BS 0.24999 0.00000 0.00000
21 X3 BS 0.59408 0.00000 0.00000
22 Y1 BS y = 0.12506 0.00000 -100.00000
23 Y2 BS 0.04000 0.00000 -100.00000
24 Y3 BS 0.65000 0.00000 -100.00000
    
```

労力が大幅に軽減され、汎用数理計画ソフトウェアによる最適化計算の実行に入ることができる。

汎用数理計画ソフトウェアには大規模線形計画問題を

表 10 紹介ソフトウェアの一覧表

ソフトウェア名	機能	機種	備考	問合せ先
MPSX/370	線形計画最適化	大型機	数千制約式モデル向き	IBM
AMPS	"	"	"	富士通
FMP5	"	"	"	UNISYS
MCC. MG	マトリクス・ジェネレータ	"	—	三菱総研
NLP-GRG	非線形計画最適化	"	制約式 100 以下のモデル向き	三菱総研
WISE	線形計画最適化	EWS	ブロック構造向き・内点法	KDD研 三菱総研
MG	マトリクス・ジェネレータ	"	MCC. MGの改良版	"
EQUST	線形計画モデル・チェック	"	—	三菱総研

効果的に解くための多くの機能が用意されている。

以下に主要な機能について述べよう。

1) 問題の縮小化

線形計画問題に含まれている、冗長な制約式、変数および不必要な有界変数条件を取り除いて、問題のサイズを縮小できないかを調べ、原問題と等価な縮小した線形計画問題を、自動的に生成する機能である。

この機能により問題の縮小化がされた場合には、最適化計算に要する総計算量を減少させるとともに、問題を縮小化する過程で、問題の実行不可能、あるいは無限解等の定式化に含まれている誤りをこの段階で発見することができるという効果もある。

2) 多重プライシング

大規模線形計画問題の膨大なデータ・ファイル（マトリクス・ファイル）を最適化計算での反復の各プライシング毎に処理することをせず、多重プライシングでは1回のプライシングで複数の基底候補を選ぶ。以下の反復では、選ばれた基底候補群のみを対象として、最適化計算の反復を行ない、基底候補になりうる変数がなくなるまで繰り返し、再びプライシングに入る。これによりデータ・ファイルは、各プライシング毎に一度読み込めばよく、各プライシング毎に1回以上の反復が実行されることになる。

3) 基底逆行列の再逆転

再逆転は、現在の基底の逆行列を新しく計算する。これにより逆行列の積形式の大きさを、できる限り減少させ、その結果、以降の最適化計算を、精度よく、速く実行することができることになる。再逆転の算法としてはLU三角化法が用いられている。

大規模線形計画問題の、最適化計算実行の次のような状況で、再逆転が必要となる。

(1) 一部または全基底を、初期解として与えて最適化計算を実行する場合。

(2) 計算の進行にともなって蓄積される丸めの誤差が増大した場合。

(3) 基底逆行列の、イータ・ベクトルの増加により、1反復あたりの計算時間が増大した場合。

4. おわりに

例題を中心とした説明のため、図、表が多くなり、与えられた枚数を大幅に超過しましたことをお詫びします。当初はKarmarkarらによる、内点法にもとづくソフトウェアの大規模線形計画問題に対する取扱い等にも言及する予定でしたが、次号以降に報告させていただきます。

参考文献

- [1] IBM corporation: IBM Mathematical Programming System Extended/370 (MPSX/370) Programming Reference Manual, Publication SH19-1095-1
- [2] IBM corporation: IBM Mathematical Programming System Extended/370 (MPSX/370) Control Language, Publication SH19-1094-2
- [3] 反町洋一編: 線形計画法の実際, 産業図書, 1992
- [4] 三菱総合研究所: NLP-GRG 利用者マニュアル
- [5] Konno, H.: Portfolio Optimization Using L1 Risk Measure. IHSS 88-9, Inst. of Human and Social Sciences, Tokyo Inst. of Technology, 1988
- [6] 小田稔周, 熊野長次郎, 前田英次郎: ベクトル処理・並列処理を用いた内点法プログラム—通信網計画問題への適用を中心として—, RAMPシンポジウム論文集 (1990)

会 合 記 録

1月8日(金)	研究普及委員会	10名
1月14日(木)	庶務幹事会	5名
1月18日(月)	編集委員会	11名
1月21日(木)	表彰委員会	9名
1月21日(木)	理事会	16名
1月26日(火)	ORの基本課題検討委員会	6名

第5回理事会議題 (5-1-21)

1. 平成4年度第4回理事会議事録の件
2. 入退会の件
3. 各委員会報告
第3・四半期収支報告の件
研究部会の新設ならびに継続の件
RAMPシンポジウム収支決算報告の件
平成5年度秋季研究発表会・シンポジウム日程変更の件
平成5年度事業計画・予算案の件