ORメモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた知恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，“新鮮に”，しかも“コンパクトに”表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

ランダムウォークとギルサノフの定理

木島　正明

ブラウン運動やマルチンゲールを扱う確率解析において，応用上最も有効な結果の1つにギルサノフ(Girsanov)の定理がある．近年ファイナンスなどでしばしば使われている[1]ので，この定理の名前を知っている諸兄や，実際に使ったことのあるORワーカーも少なくないと思われるが，この定理の内容となると直観的にすぐに理解できるという人は少ないであろう．ギルサノフの定理の最も初等的な形は次のようなものである：

定理 1　$\{B(t),\ t\geq 0\}$ を $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上の標準ブラウン運動とすれば

(1) $$\tilde{B}(t)=B(t)-\mu t$$

で定義される $\{\tilde{B}(t),\ 0\leq t\leq T\}$ は確率測度 $\tilde{P}$ に関して標準ブラウン運動である．ただし $T>0$ で確率測度 $\tilde{P}$ は

(2) $$\tilde{P}(A)=E[I_A Y(T)],\quad A\in\mathscr{F}_T,$$

(3) $$Y(t)=\exp\left\{\mu B(t)-\frac{\mu^2}{2}t\right\},\quad t>0,$$

として定義される．ここで $\mathscr{F}_t$ は $B(s)$，$0\leq s\leq t$，から生成される可算加法族であり，I_A は事象 A の定義関数である．　□

ここでは定理1の essense を，ランダムウォークを使って見てみよう．

1.　ランダムウォーク

$X_1, X_2, \ldots$ を独立で同一の分布 $\Pr[X_1=1]=p$, $\Pr[X_1=-1]=q=1-p$，$0<p<1$，に従う確率変数の列とし，

(4) $$W_0=w;\ W_n=w+\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad n=1,2,\ldots,$$

とおく．このとき，$\{W_n,\ n=0.1,\ \ldots\}$ をランダムウォーク，あるいは確率 p を明示したいときには p－ランダムウォークと呼ぶ．$m(\theta)$ を X_1 の積率母関数とすると，

(5) $$m(\theta)=E[e^{\theta X_1}]=pe^{\theta}+qe^{-\theta}$$

はすべての θ に対して存在する．いま，$W_0=i$ とし

(6) $$Y_n=m^{-n}(\theta)e^{\theta(W_n-i)},\quad n=1,2,\ldots,$$

とおく．$W_n-i=\sum_{i=1}^{n}X_i$ であるから $Y_n=\prod_{n=1}^{n}e^{\theta X_i}/m(\theta)$ であることに注意すれば，

(7) $$E[Y_n]=\prod_{i=1}^{n}m^{-1}(\theta)E[e^{\theta X_i}]=1,\quad n=1,2,\ldots,$$

であることがわかる．T を十分に大きな時点とし，ある事象 A に対して[1]

(8) $$\tilde{P}(A)=E[I_A\ Y_T]$$

とおく．$\tilde{P}$ が確率測度であることは，(7)より $\tilde{P}(\Omega)=E[Y_T]=1$，また $I_A Y_T\geq 0$ であるから $\tilde{P}(A)\geq 0$，さらに定義関数の性質より $\tilde{P}$ の可算加法性が成立することから示される．(8)の右辺はもともとの確率測度 P に関する期待値であるから，(8)は Y_T をかけることにより確率測度を P から $\tilde{P}$ へ変換したことになる．(8)を**測度変換**(change of measure)と呼んでいる．(以下では，確率測度 $\tilde{P}$ の確率や期待値を $\tilde{\Pr}$ や $\tilde{E}$ と書くことにする．)

定理 2　測度変換(8)により，p－ランダムウォーク $\{W_n,\ n=0,1,\ldots\}$ は $\tilde{p}$－ランダムウォーク $\{W_n,\ n=0,1,\ldots,T\}$ に変換される．ここで $\tilde{P}$ は

$$\tilde{P}=\frac{pe^{\theta}}{pe^{\theta}+qe^{-\theta}}$$

として与えられる．

証明：$n\leq T$ のとき，$\tilde{p}=\tilde{\Pr}[X_n=1]$ は(8)より

$$\tilde{p}=E\left[m^{-1}(\theta)I_{\{X_n=1\}}e^{\theta X_n}\prod_{i\neq n}m^{-1}(\theta)\,e^{\theta X_i}\right]$$

で与えられるが，X_i，$i=1,\ldots,T$，は独立であるから

$$\tilde{p}=E[m^{-1}(\theta)I_{\{X_n=1\}}e^{\theta X_n}]\prod_{i\neq n}E[m^{-1}(\theta)\ e^{\theta X_i}]$$

---

[1]正確にはある確率空間$(\Omega,\mathscr{F},P)$を考えて，$A\in\mathscr{F}_T$ である事象に対していうべきである．ここで $\mathscr{F}_T$ は W_n，$n=0,\ldots,T$，から生成される可算加法族である．また，記号 Pr や E はこの確率測度 P から定義されたものである．

きじま　まさあき　筑波大学　経営システム科学

$$=m^{-1}(\theta)E[I_{\{X_n=1\}}e^{\theta X_n}]$$
$$=\frac{pe^{\theta}}{pe^{\theta}+qe^{-\theta}}$$

を得る．同様にして $\tilde{q}=\tilde{\Pr}[X_n=-1]=1-\tilde{p}$ を得る．

また，

$$\tilde{\Pr}[X_1=i_1,\ldots,X_T=i_T]=E[I_{\{X_1=i_1,\cdots,X_T=i_T\}}Y_T]$$
$$=E\left[\prod_{n=1}^{T}m^{-1}(\theta)I_{\{X_n=i_n\}}e^{\theta X_n}\right]$$
$$=\prod_{n=1}^{T}E[m^{-1}(\theta)I_{\{X_n=i_n\}}e^{\theta X_n}]$$

が成立するから，X_n, $n=1,\ldots,T$, は$\tilde{P}$の下でも独立である．よって $\{W_n, n=0,1,\ldots,T\}$ は $\tilde{P}$ の下では $\tilde{p}$ーランダムウォークである． □

定理2の系 $\theta=\log\sqrt{q/p}$ とおけば，測度変換(8)により pーランダムウォークは対称 ($p=1/2$) なランダムウォーク $\{W_n,\ n=0,1,\ldots,T\}$ に変換される．

証明： $\theta=\log\sqrt{q/p}$ のとき

$$\tilde{p}=\frac{pe^{\theta}}{pe^{\theta}+qe^{-\theta}}=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{pq}+\sqrt{qp}}=\frac{1}{2}$$

である． □

定理2の応用例を1つ示そう．0に吸収壁をもつ対称なランダムウォークの状態確率は鏡像原理により求められる[2]が，鏡像原理は非対称 ($p\neq 1/2$) なランダムウォークには直接適用されない概念である．そこで定理2により測度を変換し，対称なランダムウォークの結果を非対称なランダムウォークの結果へと変換する．$\{W_n, n=0,1,\ldots\}$ を確率測度Pの下で対称なランダムウォークとすれば，定理2から$\theta=\log\sqrt{p/q}$とおくことにより，$\{W_n,\ n=0,1,\ldots,T\}$ は確率測度 $\tilde{P}$ の下で pーランダムウォークとなる．$n\leq T$ とし $M_n=\min_{0\leq k\leq n}W_k$ とすると，0に吸収壁をもつ pーランダムウォークの状態確率 $b_{ij}(n)$ は

$$b_{ij}(n)=\tilde{\Pr}[W_n=j,M_n>0\,|\,W_0=i],\ i,j>0, n=0,1,\ldots,$$

で与えられる．よって(8)より，$b_{ij}(n)=E[I_{\{W_n=j,M_n>0\}}Y_T\,|\,W_0=i]$

であるが，$W_T=W_n+\sum_{i=n+1}^{T}X_i$ であり，W_n と X_i, $i=n+1,\ldots,T$, は独立であるから，

$$b_{ij}(n)=E[I_{\{W_n=j,M_n>0\}}Y_n\,|\,W_0=i]$$
$$E\left[\prod_{i=n+1}^{T}m^{-1}(\theta)e^{\theta X_i}\right]$$
$$=m^{-n}(\theta)\,E[I_{\{W_n=j,M_n>0\}}e^{\theta(W_n-i)}\,|\,W_0=i]$$
$$=n^{-n}(\theta)e^{\theta(j-i)}\Pr[W_n=j,\ M_n>0\,|\,W_0=i]$$

が成立する．よって，0に吸収壁をもつ対称なランダムウォークの状態確率 $\Pr[W_n=j,M_n>0\,|\,W_0=i], i,j>0, n=0,1,\ldots,$ から $b_{ij}(n)$ が得られる．

X_n の変位と時間の間隔を同時に小さくすることにより，定理2の系から定理1が得られることを示そう．以下では簡単のために $W_0=0$ とし，X_n, $n=1,2,\ldots,$ を

(9) $$\Pr[X_n=\triangle x]=p=\frac{1}{2}-\frac{\mu}{2}\triangle x,$$
$$\Pr[X_n=-\triangle x]=q=\frac{1}{2}+\frac{\mu}{2}\triangle x,$$

に従う独立な確率変数の列とする．また，時間間隔$\triangle t$を $\triangle t=(\triangle x)^2$ となるように定める．このとき，時点 t では $n=t/\triangle t$ 時点でのランダムウォーク W_n を考えることになる．(9)より，W_n の期待値と分散はそれぞれ

$$E[W_n]=\sum_{i=1}^{n}E[X_i]=n(p-q)\triangle x=-t\mu,$$

$$V[W_n]=\sum_{i=1}^{n}V[X_i]=4npq(\triangle x)^2=t(1-\mu^2(\triangle x)^2),$$

となる．よって$\triangle x\to 0$ のとき，中心極限定理により，ランダムウォーク W_n はドリフト係数が$-\mu$で拡散係数1のブラウン運動 $B(t)-\mu t$ に収束する．

さて X_n の変位が$\triangle x$ であることに注意し，θ を定理2の系のように定めれば，(9)より

(10) $$\theta=\frac{\log q/p}{2\triangle x}=\frac{1}{2\triangle x}\log\left(1+\frac{2\mu}{1-\mu\triangle x}\triangle x\right)$$

で与えられる．また，このとき X_n の積率母関数は

(11) $$m(\theta)=\sqrt{4pq}=\sqrt{1-\mu^2(\triangle x)^2}$$

となる．定理2の系より，各$\triangle x$に対して，確率測度 $\tilde{P}$ の下では $\{W_n\}$ は対称なランダムウォークであるから，$\triangle x\to 0$ のとき，(8)により変換された確率測度の下では標準ブラウン運動に収束する[2]．よって，$\triangle x\to 0$ のときの Y_n の収束先を調べればよい．$(\triangle x)^2=\triangle t, n=t/\triangle t$ に注意すれば，(11)より，

$$m^{-n}(\theta)=(1-\mu^2\triangle t)^{-t/2\triangle t}\to\exp\left\{\frac{\mu^2 t}{2}\right\},\quad \triangle x\to 0,$$

を得る．また(10)より $\triangle x\to 0$ のとき $\theta\to\mu$．よって(6)から

$$Y_n\to\exp\left\{\frac{\mu^2 t}{2}+\mu(B(t)-\mu t)\right\}=Y(t),\quad \triangle x\to 0,$$ と

なり，定理1が証明された．

参 考 文 献

[1] 森村英典・木島正明，(1991)，ファイナンスのための確率過程，日科技連．

[2] W. Feller, (1957), *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume I, John Wiley, New York.

[2]拡散係数は$\triangle t$ と$(\triangle x)^2$ の比から定まる定数なので，この場合は1である．