OR メモランダム

このコラムは，ORにかかわる概念，知識(手法，原理)，それらの図解，よい教材や問題，実学ORの実施経験，そこから得られた知恵やアドバイス，失敗談と教訓，新しい視点，視座，フレームワーク，未だ解けていない問題，面白い研究テーマなどを，"新鮮に"，しかも"コンパクトに"表現し，提示していただくものです．ユニークなアイディア，フレッシュな見方，発想，だれかと意見をたたかわせたい問題提起など，ふるってご投稿ください．(原稿は，刷り上がり，半ページから3ページに納まるようにお書きください．簡単に！ 加筆訂正をお願いする場合があります)

円の中の2点間の距離の期待値について

伊藤　忠雄

1. はじめに

米国の古いORの雑誌のニュースレター［1］に次のようなクイズが出ている．

「半径1の円の中にランダムにとった2つの点の間の距離の期待値を求めよ」

解答欄には，正解$=8/3\pi=0.8488\cdots$ とだけ書いてあるが，後述のとおり，この"正解"は正しくない．そこでまず数値実験（モンテカルロ法）による解を求め，次に一般化して，n次元の球の場合，また，個別化して正m角形の場合の正しい解について調べてみた．モンテカルロ法の演習問題として紹介する．

2. 円の場合

$X_1^2+X_2^2\leqq 1$，$Y_1^2+Y_2^2\leqq 1$ を満たす互いに独立な一様乱数 $|X_k|$，$|Y_k|\leqq 1(k=1,2)$ をN組作り，2点 (X_1, X_2)，(Y_1, Y_2) の間の距離 $L2=\sqrt{(X_1-Y_1)^2+(X_2-Y_2)^2}$ を求めてN組の平均値 $\bar{L}_2$ を計算する．

3. n次元の球の場合

半径1のn次元の球の方程式 $X_1^2+X_2^2+\cdots X_n^2=1$ の場合も同様にして $X_1^2+\cdots+X_n^2\leqq 1$，$Y_1^2+\cdots+Y_n^2\leqq 1$ を満たす互いに独立な一様乱数 $|X_k|$，$|Y_k|\leqq 1(k=1,2,\cdots,n)$ をN組作り，2点間の距離 $L_n=\sqrt{(X_1-Y_1)^2+\cdots+(X_n-Y_n)^2}$ を求めればよい，はずであるが，nが大きくなるとともに乱数の採用される割合が急激に悪くなるので工夫が要る．($n=5$ のとき $\pi^2/60=0.16$)

一般に，互いに独立な一様乱数 $0\leqq U$，$V\leqq 1$ を用いると，$X=\sqrt{-2 1nU}\cdot\cos(2\pi U)$，$Y=\sqrt{-2 1nV}\cdot\sin(2\pi V)$ はそれぞれ独立に，平均$=0$，分散$=1$ の正規乱数になり，このようなn組の正規乱数 (X_k, Y_k) を用いると，$x_k=X_k/\sqrt{X_1^2+\cdots+X_n^2}$，$y_k=Y_k/\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_n^2}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ は半径1のn次元の球面上で一様分布する．したがって，別に求めた互いに独立な一様乱数 $0\leqq r$，$s\leqq 1$ により，$x_k'=\sqrt[n]{r}\cdot x_k$，$y_k'=\sqrt[n]{s}\cdot y_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$ とすれば，x_k'，y_k' はそれぞれ半径r，s のn次元の球面上のランダムな2つの点になる［2］．このようにしてランダムな2点間の距離 $L_n=\sqrt{(x_1'-y_1')^2+\cdots+(x_n'-y_n')^2}$ を求めてN組の平均値 $\bar{L}_n$ を計算する．

$n=2,3,\cdots,10$ の場合の結果は**表1**のとおりである．

表1　n次元の球の場合の期待値 $\bar{L}_n$

N \ n	2	3	4	5	6	7	8	10
1000	.9024	1.0289	1.0916	1.1532	1.1895	1.2211	1.2416	1.2613
2000	.9049	1.0181	1.0964	1.1598	1.1880	1.2174	1.2416	1.2652
5000	.9073	1.0233	1.0934	1.1506	1.1963	1.2164	1.2384	1.2666
∞	.9054	1.0286	1.1037	1.1544	1.1909	1.2183	1.2398	1.2712

($N=\infty$ は厳密解，$n\to\infty$ のときは $\bar{L}_n\to\sqrt{2}=1.4142\cdots$)

4. 正m角形の場合

半径1の円に内接する正m角形 ($m\geqq 3$) 内のランダムな2つの点 $P(X, Y)$，$Q(X', Y')$ の間の距離 $L=\sqrt{(X-X')^2+(Y-Y')^2}$ を求める．

互いに独立な一様乱数 $|X|$，$|Y|\leqq 1$ のうち図1のように正m角形をm等分した小3角形 $0P_kP_{k-1}$ 内に属す

いとう　ただお　東レ㈱情報システム推進部
〒103 中央区日本橋室町2-2-1

る（次式を満たす）ものを採用し，これを点 $P(X,\ Y)$ とする．

$$(X_k-X_{k-1})(Y-Y_k)-(X-X_k)(Y_k-Y_{k-1})\geqq 0$$

ここで $k,\ s$ は次式から求める．

$$s=\tan^{-1}(Z)-2k\bar{s},\quad \bar{s}=\pi/m$$

$$s_{k-1}=(2k-1)\bar{s}\leqq s+2k\bar{s}\leqq(2k+1)\bar{s}=s_k$$

ただし

$$\begin{aligned}Z&=Y/X && (X\neq 0)\\ &=1 && (X=0,\ Y\geqq 0)\\ &=-1 && (X=0,\ Y<0)\end{aligned}$$

同様にして点 $Q(X',\ Y')$ を求めて PQ 間の距離 L を求める．これをN回くりかえして平均値 $\bar{L}$ を計算する．$m=3,4,\cdots,50$ の場合の結果は**表 2** のとおりである．

表 2　正m角形の次合の期待値 $\bar{L}$

N \ m	3	4	5	6	8	10	20	50
1000	.6322	.7334	.7959	.8297	.8403	.8821	.8981	.9086
2000	.6302	.7376	.7998	.8173	.8524	.8821	.8969	.9045
5000	.6304	.7347	.7956	.8239	.8601	.8692	.8942	.9044
∞	.6318	.7374	.7937	.8263	.8600	.8761	.8980	.9042

（$N=\infty$ は厳密解，$m=4$ のときは $\bar{L}=2(1+\sqrt{2})/15+\sqrt{2}\ \ln(1+\sqrt{2})/3$）

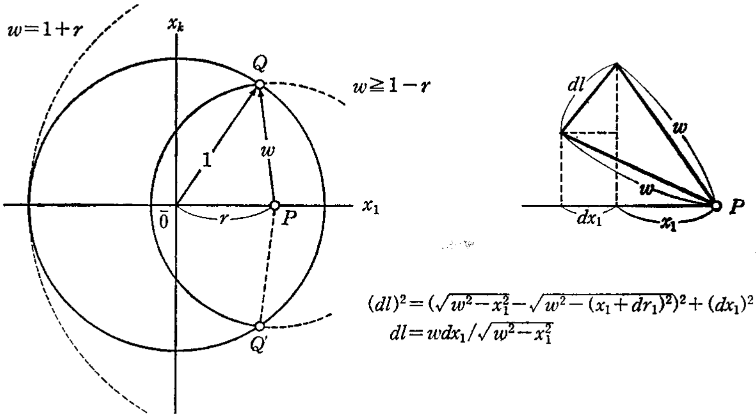

図 2　正m角形の場合

5.　厳密解の計算方法

（1）　n次元の球の場合

$n=2$ の場合，**図 2** のように半径 1 の円O内の点 $P(r,\ 0)$ を中心とする半径wの円Pを作ると，2 つの円は $|w-1|\leqq r$ のとき交わる．その交点の x_1 座標の値を z とすれば

$$z=(1+r^2-w^2)/(2r)$$

$$L_2(r)=\{\int_0^{1-r}w(2\pi\ w)dw+\int_{1-r}^{1+r}w(\overline{QQ'})dw\}/\pi \qquad (1)$$

$$\bar{L}_2=\int_0^1 L_2(r)(2r)dr \qquad (2)$$

ただし

$$\overline{QQ'}=2\int dl=2\int_{r-w}^{z}dx_1/\sqrt{1-((x_1-r)/w)^2}$$
$$=2w(\sin^{-1}t+\pi/2)$$
$$t=(1-r^2-w^2)/(2rw) \qquad (3)$$

(1)を(2)に代入して，$r,\ t$ の順に積分すると

$$\bar{L}_2=8/(3\pi)\cdot(1+1/15)$$
$$=0.8488\times 1.0667$$
$$=0.9054$$

すなわち，正解は前述の“正解”より約 7 %大きい．

$n\geqq 3$ の場合，一般に半径Rの n 次元の球の方程式は $X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_n{}^2=R^2$，その体積 V_n，表面積 S_n は次式で表わされる．

$$V_n=c_nR^n,\quad S_n=nc_nR^{n-1}$$

ただし，$c_n=(2\pi)^{n/2}\quad n!!$

$$n=\text{偶数},\quad n!!=n(n-2)\cdots 4\cdot 2=2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}/n!!$$

$$n=\text{奇数},\quad n!!=n(n-2)\cdots 3\cdot 1$$

前と同様に球O内の点Pを中心とする半径wの球を作ると，2 つの球の交わり部分は半径 $\sqrt{w^2-(x_1-r)^2}$ の $n-1$ 次元の球となるから，その“切り口”の表

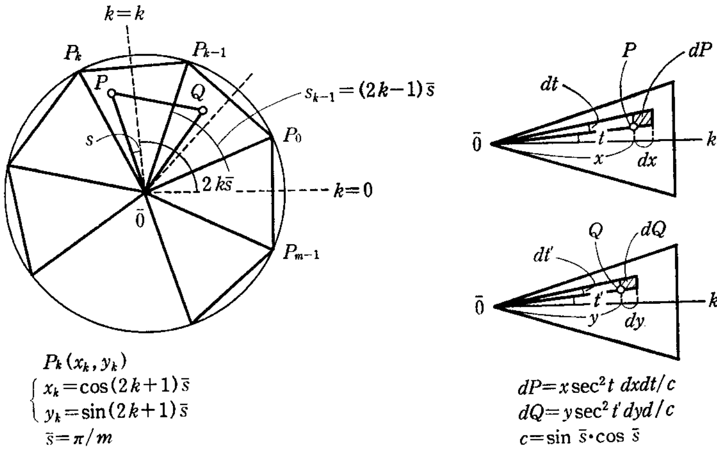

図 1　n次元の球の場合

面積 $\overline{QQ'}$ は次式で表わされる．

$$\overline{QQ'}=\int S_{n-1}dl$$
$$=(n-1)c_{n-1}w^{n-2}$$
$$\int_{r-w}^{z}(\sqrt{1-((x_1-r)/w)^2})^{n-3}dx_1 \qquad (4)$$

$n=2$ の場合と同様にして期待値 $L_n(r)$，$\bar{L}_n$ を求める．(3)から w を t の関数として表わして(4)に代入すると

$$w=-rt+\sqrt{1-(1-t^2)r^2}$$
$$=-rt+\sqrt{A},\quad A=1-(1-t^2)r^2$$
$$L_n(r)=\int_0^{1-r}wS_n dw/c_n+\int_{1-r}^{1+r}w\overline{QQ'}dw/C_n$$
$$=c(n-1)n!!/(n+1)!!$$
$$\int_{-1}(-rt+\sqrt{A})^{n+1}(\sqrt{1-t^2})^{n-3}dt$$
$$\bar{L}_n=\int_0^1 nr^{n-1}L_n(r)dr$$
$$=c(n-1)n!!/(n+1)!!\cdot I$$

ただし，

$$I=\int_0^1 r^{n-1}\{\int_{-1}^1\sum\binom{n+1}{i}(-rt)^{n+1-i}(\sqrt{A})^i$$
$$(\sqrt{1-t^2})^{n-3}dt\}dr$$
$$c=1/\pi \quad n=2k \quad (偶数)$$
$$=1/2 \quad n=2k-1 \ (奇数)$$

ここで，I は，$n=2k$，$2k-1$ の場合にわけて r，t の順に積分して求める．$n=2k$ の場合，$R=(1-t^2)r^2$ と変換して

$$I=2\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1}\int_0^1 t^{2k-2j}(1-t^2)^{k-3/2}$$
$$\{\int_0^1 r^{4k-2j-1}(\sqrt{A})^{2j+1}dr\}dt$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\binom{2k+1}{2j+1}\int_0^1 t^{2k-2j}(1-t^2)^{-k+j-3/2}$$
$$B_{1-t^2}(2k-j,\ j+3/2)dt$$

ただし

$$B_x(p,q)=\int_0^x\cdots R^{p-1}(1-R)^{q-1}dR$$

（不完全ベータ関数）

$n=2k-1$ の場合も同様な式になり，これらはガウスの超幾何関数，ガウスの公式を用いて計算できるので最終的に次の結果を得る［3］．

$$\bar{L}_n=c\cdot 2^{2n+2}\cdot n\cdot n!!(n!)^2/(n+1)(2n+1)$$
$$(n+1)!!(2n)!!$$

漸化式にまとめると

$$\bar{L}_n=4(n+1)(n+3)^3\bar{L}_{n-2}/n(n+3)(2n+3)(2n+5)$$

ただし，$\bar{L}_1=2/3$，$\bar{L}_2=8/(3\pi)(16/15)$

（2） 正 m 角形の場合

図1のように小3角形に番号 $k=0,1,2,\cdots,m-1$ をつけて点 Q の属する小3角形を $k=0$ に固定し，点 P の属する小3角形を $k=k$ とすれば，点 P，Q の間の距離 L_k は，余弦定理を用いて

$$L_k=\sqrt{(X\,\mathrm{sect})^2+(Y\,\mathrm{sect}')^2-2XY(\mathrm{sect})(\mathrm{sect}')}$$
$$\overline{\cos(t_k+t-t')}$$

ただし，$t_k=2\pi k/m=2k\bar{t}$，$\bar{t}=\pi/m$

点 P，Q がそれぞれの近傍にある確率は，小さな台形の面積 dP，dQ に比例するから，L_k の期待値 $\bar{L}_k$ は，次のような4重積分により計算できる．

$$\bar{L}_k=\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int L_k dPdQ$$

ただし，積分区間は次のとおりである．

$t,\ t'$；$[-\bar{t},\ \bar{t}]$，X，Y；$[0,\ \cos(\bar{t})]$

最終的な期待値 $\bar{L}$ はこれらを平均して求める．

$$\bar{L}=\sum_{k=1}^{m}\bar{L}_k/m$$

具体的には次のように計算する．

$$I=\int\!\!\int L_k dtdt'$$
$$=\{F(\bar{s},\ -\bar{s})-F(\bar{s},\ \bar{s})+F(-\bar{s},\ \bar{s})$$
$$-F(-\bar{s},\ -\bar{s})\}/2$$

ここで $F(u,\ v)$ は次式で計算する．

$\alpha=\cos(s_k)$，$\beta=\sin(s_k)$，$s_k=2\pi k/rn$，$\bar{s}=\pi/rn$

$\beta\neq 0$ のとき，$F(u,v)\cdot\cos^3(u)=\alpha Z^3/3-2A_1A_2Z/3$
$+(A_1^3 ln|B_1-Z|)/(3\beta)+(A_2^3 ln(B_2+Z))/(3\beta)$

$\beta=0$ のとき，$F(u,v)\cdot\cos^3(u)=\alpha Z^3/3-\alpha A_1^2 Z$
$+A_1^2 B_1 ln|B_2+Z|$

ただし，

$$A_1=X\cos(u+s_k)-Y\cos(v)$$
$$A_2=X\cos(u)-Y\cos(v-s_k)$$
$$B_1=X\sin(u+s_k)-Y\sin(v)$$
$$B_2=X\sin(u)-Y\sin(v-s_k)$$
$$Z=\sqrt{X^2+Y^2-2XY\cos(s_k+u-v)}$$

次に，$F(u,\ v)$ を X，Y で積分する．

$$G(u,v)=\int\!\!\int F(u,v)dXdY$$
$$\bar{L}_k=\{G(\bar{s},\ -\bar{s})-G(\bar{s},\ \bar{s})+G(-\bar{s},\ \bar{s})$$
$$-G(-\bar{s},\ -\bar{s})\}/2$$

すなわち，$G(u,v)$ を計算するプログラムを作ればよい．これは2次の無理関数が中心であるから不定積分が容易に求められるので精密に計算できる．ただし $m=4$ など特殊な場合を除くと簡単な式にはなりそうもない．

参 考 文 献

［1］ Paul, Hughes；"BRAIN TEASERS", *OR/MS TODAY*, vol.7, No.1 (1980)

［2］ D. E. Knuth; *The art of computer programming-vol. 2/seminumerical algorithms*, Adison-Wesley Pub. Co. (1969)
［D.E.クヌース（渋谷訳）；第3分冊―準数値計算法/乱数，サイエンス社（1981）］

［3］ 森口，宇多川，一松：数学公式III，岩波全書(1960)