オプション組み入れポートフォリオの収益率分布評価システムの構築

大久保 由紀子
(筑波大学大学院経営・政策科学研究科経営システム科学専攻 現所属:エー・ピー・エルソフトウェア)
指導教官 木島正明助教授

1. はじめに

近年,金融市場の自由化が進展するなかで投資手法が多様化してきている.特に株式から構成されるポートフォリオにオプションを組み入れる手法は,リスク回避や投機などの目的のために広く利用されている.ところがオプションのように非対称な収益率をもつ証券をポートフォリオに組み込んだ場合には,収益率の分布を正規分布と仮定したマーコビッツモデルは適用できない.そこでポートフォリオの価値が将来時点においてどのような確率分布に従っているかを調べ,確率分布に見合うようにポートフォリオをデザインすることが必要となってくる.

Bookstaber[1]は,シングルインデックスモデルを利用してオプション組み入れポートフォリオの収益率評価のアルゴリズムを提示したが,現物証券と同一銘柄のオプションを組み入れることを前提としていることや,期待収益率から収益率分布の密度関数値を近似的に計算していることなどいくつかの問題点がある.

本論文では,ポートフォリオ収益率の期待値ではなくその確率分布を投資家に提示することにより,投資家のポートフォリオデザインを支援するシステムを構築することを目的とする.システム化にあたっては,日本市場の現状を考慮し,複数の銘柄からなる株式ポートフォリオにインデックスオプションの組み入れおよびコール・プットの組合せを可能にし,近似手法を使用せず正確な収益率分布が計算できる評価システムを提示した.

2. 複数銘柄の株式を組み入れたポートフォリオの評価モデル

t時点の株式ポートフォリオの価格をS_t,株式ポートフォリオの現在の価格S_0,t時点の株価指数の価格をS_t^M,コールとプットのプレミアムをCとP,コールとプットの行使価格をLとKとする.いま投資家が株式ポートフォリオをa枚購入し,コールオプションをb枚,プットオプションをc枚購入($b,c<0$の場合には売却)したとすると,このオプション組み入れポートフォリオの収益率は,

$$X=\frac{aS_t+b[S_t^M-K]^++c[L-S_t^M]^+}{aS_0+bC+cP}-1 \qquad (1)$$

となる.ただし,$[\varepsilon]^+=\max\{\varepsilon, 0\}$,$a>0$,$K>L$とする.

またt時点の株式の市場反応度をβ_t,株式固有の要因を$\tilde{e}_t$とすると株価指数の収益率R_t^Mと株式の収益率R_tの関係は,

$$R_t=\alpha_0+\beta_t R_t^M+\tilde{e}_t \qquad (2)$$

となるシングルインデックスモデルで記述される.ここでR_t^Mは平均がμ_tで分散がσ^2_tの正規分布に従い,$\tilde{e}_t$は平均が0で分散がσ^2_{et}の正規分布に従うとする.

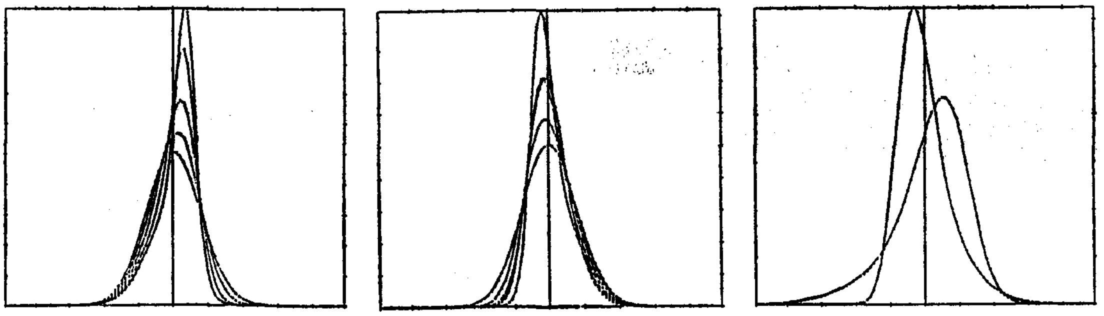
(1)式に

$S_t=S_0(R_t+1)$;$S_t^M=S_0^M(R_t^M+1)$

を代入しシングルインデックスモデル(2)を適用すると,オプション組み入れポートフォリオの収益率Xは(3)式となり,その確率密度関数は(4)式で与えられる.(4)式では$A_1\geq 0$,$C_1>0$の場合のみ記したが,他の場合も同様にして与えられる.

3. 数値例

典型的なオプション戦略やコール・プット・株式ポートフォリオのそれぞれの組み入れ比率・市場反応度β_tを変化させて,ポートフォリオの確率分布計算を行なった.また実務現場で戦略策定に使用しているペイオフダイヤグラムや期待収益率・歪度・尖度と対比し確率分布の有用性を実証した.ポートフォリオ構築で典型的な手法である(a)カバードコール,(b)プロテクティブプット,(c)コール・プットの例を図1に示す.



(a) (b) (c)

$\sigma=0.3, r=0.07, t=0.25, \beta_t=1, \alpha_t=0, \sigma_e=0.21, K, L, S_0^M, S_0=1000$ とした

(a)：$a=1$, $c=0$ 固定，最大値の大きい順に $b=-1, -0.75, -0.5, -0.25, 0$

(b)：$a=1$, $b=0$ 固定，最大値の大きい順に $c=0.75, 0, 0.5, 0.25, 1$

(c)：最大値の大きい順に $(a=1, b=1, c=2), (a=1, b=-1, c=-2)$

図 1 カバードコール，プロテクティブプット，コール・プットの例

4. 拡張と今後の課題

本論文では，行使価格の異なる2種類のオプションを組み入れたポートフォリオのモデル化を行なったが，(2)式を修正することにより，行使価格が3種類以上のオプションを組み入れた場合にも容易に拡張できる．

また投資家は具体的に投資戦略を提示するようなシステムを望んでいるが，そのためには知識工学のアプローチを含めた意思決定支援システムの構築が必要であり，これは今後の課題である．

参考文献

[1] Bookstaber, Richard, and Roger Clarke, "An Algorithm to Calculate the Return Distribution of Portfolios with Option Positions." Management Science, 29 (No.4, April 1983), 419-429

$$X=\frac{aS_0(\alpha_t+\beta_t R_t^M+\tilde{e}_t+1)+b[S_0^M(R_t^M+1)-K]^+ + c[L-S_0^M(R_t^M+1)]^+}{aS_0+bC+cP}-1$$

式(3)：1コール・1プットの場合のオプション組み入れポートフォリオの収益率

$h_A(x)=(x+1)(aS_0+bC_0+cP_0)-aS_0(\alpha_t+1)-cL+cS_0^M$; $A_1=aS_0\beta_t-cS_0^M$ $A_2=aS_0$,

$h_B(x)=(x+1)(aS_0+bC_0+cP_0)-aS_0(\alpha_t+1)$; $B_1=aS_0\beta_t$ $B_2=aS_0$,

$h_C(x)=(x+1)(aS_0+bC+cP)-aS_0(\alpha_t+1)+bK-bS_0^M$; $C_1=aS_0\beta_t+bS_0^M$ $C_2=aS_0$,

$\gamma_A{}^2=\sigma^2A_1{}^2+\sigma_e{}^2A_2{}^2, \delta_A{}^2=\sigma_e{}^2A_2{}^2/\sigma^2A_1{}^2, \gamma_B{}^2=\sigma^2B_1{}^2+\sigma_e{}^2B_2{}^2, \delta_B{}^2=\sigma_e{}^2B_2{}^2/\sigma^2B_1{}^2, \gamma_C{}^2=\sigma^2C_1{}^2+\sigma_e{}^2C_1{}^2, \delta_C{}^2=\sigma_e{}^2C_2{}^2/\sigma^2C_1{}^2$

$\phi(x)$：標準正規分布の密度関数，$\Phi(x)$：標準正規分布の分布関数

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Pr[X\le x]=&\frac{h'_A(x)}{\gamma_A\sqrt{t}}\phi\left(\frac{h_A(x)-\mu tA_1}{\gamma_A\sqrt{t}}\right)\Phi\left(\frac{(L/S_0^M-1)A_1(1+\delta_A{}^2)-h_A(x)-\mu tA_1\delta_A{}^2}{\sigma_eA_2\sqrt{(1+\delta_A{}^2)t}}\right)\\&+\frac{h'_B(x)}{\gamma_B\sqrt{t}}\phi\left(\frac{h_B(x)-\mu tB_1}{\gamma_B\sqrt{t}}\right)\left\{\Phi\left(\frac{(K/S_0^M-1)B_1(1+\delta_B{}^2)-h_B(x)-\mu tB_1\delta_B{}^2}{\sigma_eB_2\sqrt{(1+\delta_B{}^2)t}}\right)\right.\\&\left.-\Phi\left(\frac{(L/S_0^M-1)B_1(1+\delta_B{}^2)-h_B(x)-\mu tB_1\delta_B{}^2}{\sigma_eB_2\sqrt{(1+\delta_B{}^2)t}}\right)\right\}\\&+\frac{h'_C(x)}{\gamma_C\sqrt{t}}\phi\left(\frac{h_C(x)-\mu tC_1}{\gamma_C\sqrt{t}}\right)\Phi\left(-\frac{(K/S_0^M-1)C_1(1+\delta_C{}^2)-h_C(x)-\mu tC_1\delta_C{}^2}{\sigma_eC_2\sqrt{(1+\delta_C{}^2)t}}\right)\end{aligned}$$

式(4)：1コール・1プット，$A_1\ge 0, C_1>0$ の場合の確率密度関数