5. 数値計算

$M=2$，単位サービス（$b_1=1$）として，S_1の値とクラスごとの呼損率の関係や，客の到着率と，呼損率の上限を保証するために必要なバッファサイズとの関係について，ＮＰ，ＰＯ，ＢＲそれぞれの場合について数値計算を行ない，比較を試みた．結果として，ＰＯ，ＢＲのＮＰに対する優位性が確認され，ＰＯとＢＲとでは，比較する条件をどう決めるかで評価が変わることがわかった．なお，詳しい条件および結果については，本論文を参照されたい．

学生論文賞受賞論文　　要約

一般化グルーピング問題

伊藤　稔

（東海大学大学院工学研究科経営工学専攻　現所属：日本ユニシス）

指導教官　羽田隆男助教授

1. はじめに

多数の対象を，対象間の類似度に注目して，複数のクラスターに分割する問題をとりあげる．

多数の対象を，その対象間の類似度に注目してグループ分けをする問題は，同次クラスター問題として古くから一般に知られており，統計学等の分野に応用されている．一方，配送計画や工程のライン編成問題など経営工学的な諸問題に，この同次クラスター問題を適用しようとすると，分割するクラスター数の制約だけでなく，各クラスターごとに使用できる資源に制約が加わる問題となることが多い．

たとえば，配送計画では，配送センターの商品を多数の配送先に，複数のトラックで配送しようとすると，各トラックが受けもつ配送先が１つのクラスターであり，所有するトラック台数がクラスター数の制約，クラスター内の配送先への総配送量とトラックの積載量制限との関係が資源制約となる．

本修士論文では，クラスター数と資源に制約のあるクラスター問題を「一般化グルーピング問題」と称し，分枝限定法にもとづき，より効果的な解法を考え，計算時間の面からその実用性を検討する．

2. 一般化グルーピング問題の解法

対象の集合$N=\{1,2,\dots,n\}$と，対象i，$j\in N$間の類似度d_{ij}（値が小さいほど類似していると見なす）が与えられているとき，0－1変数x_{ij}を

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{対象 } i \text{ が，対象 } j \text{ を中心としたグループに含まれる場合}\\ 0, & \text{その他の場合}\end{cases}$$

とすると，一般化グルーピング問題（G）は，同次クラスター問題における各グループに，

$$\sum_{i\in N} a_i x_{ij} \leqq C,\ \ j\in N$$

ただし，a_i（$\geqq 0$，$i\in N$）：対象iが使用する資源の量

C　（$\geqq a_i$，$i\in N$）：各グループが使用できる資源の総量

であるナップザック制約を付け加えて得られる問題，

$$(G)\quad\left\{\begin{array}{ll}\min \displaystyle\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}\,x_{ij} & \\ \text{s.t.} & \\ \displaystyle\sum_{i\in N} x_{ij}=1,\ \ j\in N & \cdots\cdots\cdots(1)\\ \displaystyle\sum_{j\in N} x_{jj}=k, & \cdots\cdots\cdots(2)\\ x_{ij}\leqq x_{jj},\ \ i,\ j\in N & \cdots\cdots\cdots(3)\\ \displaystyle\sum_{i\in N} a_i x_{ij}\leqq C,\ \ j\in N & \cdots\cdots(4)\\ x_{ij}\in\{0,\ 1\},\ \ i,\ j\in N & \cdots\cdots(5)\end{array}\right.$$

を考える．

ここで，対象jを中心としてグループを構成するか否かを判断する0－1変数x_{jj}，$j\in N$を，それ以外の変数と明確に区別するため，以下では便宜上0－1変数y_j，$j\in N$と表現する．

解法としては，分枝限定法の下界値計算に，(1)式を目的関数に組みこんだラグランジェ緩和問題（$L_\mu|x,\ y$）

を考える．そこで，0−1変数 x_{ij}, i, $j\in N$, $i\neq j$ に関する制約条件と，0−1変数 y_j, $j\in N$ に関する制約条件とに区分し，$(L_\mu|x, y)$ を表現し直すと，

$$(L_\mu|x,\ y):$$

$$\sum_{i\in N}\mu_i+\left\{\begin{array}{l}\min\sum_{j\in N}y_j\left\{\begin{array}{l}\min\sum_{i\in N}(d_{ij}-\mu_i)\,x_{ij}\\ \text{s.t.}\\ \qquad\sum_{i\in N}a_ix_{ij}\leqq C\\ \qquad x_{ij}\in\{0,\ 1\},\ i\in N\end{array}\right.\\ \text{s.t.}\ \sum_{j\in N}y_j=k\\ \qquad y_j\in\{0,\ 1\},\ j\in N\end{array}\right.$$

となる．このラグランジュ緩和問題 $(L_\mu|x, y)$ の主な計算は，①0−1変数 x_{ij} の0−1ナップザック問題を n 題解き，その値の少ないものから k 個選ぶというものである．

本論文では，上記の緩和問題以外に，下界値を求める方法としてもう1つ，②0−1変数 x_{ij} を連続変数とした緩和問題を提案している．

①と②を比較すると，①はより強い下界値が得られ，分枝限定法の列挙木の拡大を抑える反面，1回の下界値計算に要する計算量が多い．②は，その逆である．そこで，どちらの下界値計算が効果的であるか，数値実験により検証している．さらに，劣勾配法の導入による下界値の強化と，ヒューリスティックな考えにもとづく，上界値の強化も行なっている．

3. 数値実験の結果

一般化グルーピング問題 (G) を解く上で，本研究で提案した下界値計算法や上界値強化は，効果的であるという結果が得られた．また，対象の数やグループ数が増えると，当然ながら次第に解きにくくなることがわかった．

ここで，計算結果を整理するため，対象の数 n とグループ数 k を変化させ，各々の n と k の組合せに対して問題の係数を一様乱数で生成した複数の問題群に対して，数値実験を行なっている．以下のグラフは，下界値算出方法において①,②どちらが有効であるか判断するため，対象の数と，グループ数の2つのパラメータを増加させていき，そのほとんど（10例中8例）が規定時間内（5分）に解ける限界を表わしている．ちなみに，使用した計算機はＮＥＣ大型コンピュータＳＸ−１Ｅである．

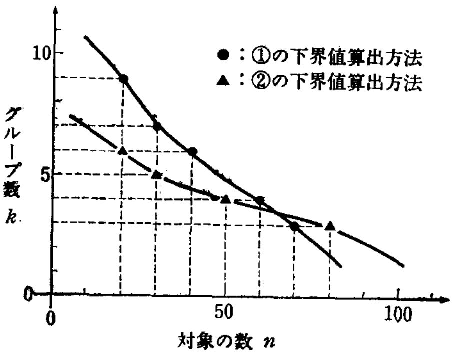

図 1　解くことのできる限界範囲

4. 結　　論

計算結果によれば，対象数が比較的小さく，グループ数が大きい問題に対しては強い下界値の得られる①が，逆に，対象の数が比較的多く，グループ数が小さい問題には②が，計算時間の点で効果的であるといえる．

このことにより，問題パターンごとに下界値の算出方法を使い分ければ，経済的な計算時間によって大規模な問題にも対応できることがいえる．また，ある企業での実際の配送問題（配送先37カ所，トラック数５台）に適用したところ，実際の問題は，一様乱数を用いた数値実験よりはるかに効率的に，わずか37秒程度で解けた．このようなことから，本論文で提案している解法は，十分に実用に耐えられるものであると判断している．

参考文献

[1] 今野　浩，鈴木久敏編：整数計画法と組合せ最適化，日科技連，ORライブラリー，No.7,（1982）

[2] Fisher, M. L., and Jaikumar, R.: “A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing”, Networks, Vol. 11, (1981), pp.109-124

[3] Mulvey, J. M., and Crowder, H. P.: “Cluster Analysis: An Application of Lagrangian Relaxation”, Manage. Sci. Vol.25, No.4, (1979), pp.329-340.

[4] Fisher, M. L.: “The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems”, Manage. Sci, Vol.27, No.1, (1981), pp.1-18