On Discrete-Time Single-Server Queues with Markov Modulated Batch Bernoulli Input and Finite Capacity

土屋　利明
（東京工業大学大学院理工学研究科情報科学専攻　現所属：ＮＴＴ）
指導教官　高橋幸雄教授

1. はじめに

待ち行列のモデルが利用される分野の１つに，通信システムにおける性能評価がある．通信システムの分野で現在最も注目されているトピックスの１つとして，B-ISDN (broad-band integrated service digital network) における ATM (Asynchronus Transfer Mode：非同期転送モード) システムのモデル化およびその評価法があげられる．このようなシステムをモデル化する際に考慮しなければならない特徴としては，

(1)時間離散型であること
(2)入力が再生型でなく，バースト性および相関をもっていること
(3)待合い室の容量が有限であり，したがって客の損失があること
(4)客のクラスが複数あり，それぞれのクラスがサービスの品質に関して異なった要求をもつこと

がある．これまでにも，上にあげた特徴をそれぞれ個別にとらえた待ち行列モデルは扱われているが，本論文ではこれらすべての要素をとり入れたタイプの待ち行列モデル (MMBP／G／１／K) について考察を行なう．

2. モデルの説明

ここで扱うシステムは時間離散型である．時間軸上の区間$(n-1, n)$を第nスロットと呼ぶことにする．客は各スロットの初めに系に到着し，サービスを受け終えたならば，スロットの終りで系から退去する．したがって客のサービス時間はスロットの数で表わされる．

バースト性および相関をもつ入力を表現するため，本論文では時間連続型の MMPP (Markov Modulated Poisson Process) に類似した，MMBP (Markov Modulated Batch Bernoulli Process) なる過程を用いる．MMBPは，２変数過程$\{Y_n, X_n\}$の形で表現される．ここで，$\{Y_n\}$はM状態の時間離散型マルコフ連鎖で，Y_nの値が第nスロットにおける客の到着過程の状態を表現し，X_nは時点nにおける系への客の到着数を表現している．X_nの分布をY_nの値に依存させることで，バースト性，および相関性をもたせることが可能となる．また，サービス時間はすべての客について互いに独立かつ同一の一般分布に従うものとする．さらに，系内の客数(サービス中の客を含む)の上限をK（バッファ・サイズと呼ぶ）とし，客の到着数とすでに系にいる客数との和がKを超えた場合には，Kを超えた分だけの客が，サービスを受けずに系を離れる（損失あるいは呼損と呼ぶ）ものとする．

以上に述べたようなタイプの待ち行列モデルを，ここではMMBP／G／１／Kで表わす．このモデルは最初に述べた特徴のうち，(1)から(3)までを有している．(4)に関しては，損失確率（呼損率）の上限について異なった要求をもつ２種類の客のクラスを仮定する．クラス毎に異なる要求を同時に満たすため，４節ではスペースプライオリティと呼ばれるサービス規律を導入する．比較のため，３節では客のクラスを区別しないで，先着順にサービスを行なうようなモデルについて考える．

3. 客のクラスを区別しないMMBP／G／１／Kモデル

客のクラスを区別しないモデルでは，クラスにかかわりなく，先着順にサービスを行なっていくものとする．したがって，事実上単一クラスの（通常の）待ち行列モデルを考えることになる．次節で述べるモデルとの区別のため，こちらのモデルをNP (No Priority) と呼ぶ．

MMBP／G／１／K 型の系の状態を表現するために，第nスロットにおける客数，およびサービス中の客の残りサービス時間をそれぞれN_n，R_nで表わす ($N_n=0$ならば，$R_n=0$とする)．すると，先に述べたY_nを加

えた3変数の過程 $\{N_n, R_n, Y_n\}$ は，マルコフ連鎖となるので，状態方程式を作り，そこから定常確率を求めることができる．解くべき状態方程式系は，R_n の値 l ごとに状態をまとめてベクトル表示することで，次のように表現することができる．

$$r(l) = b_l r(1) CV + r(l+1) AV, \quad l = 1, 2, \ldots \quad (1)$$

ここで，$r(l)$はすべての状態確率のうち，$R_n = l$ の場合を並べたKM次元ベクトル，b_lは客のサービス時間がlである確率，A, C, Vはすべて$KM \times KM$ 確率行列である（Mは Y_n の状態の数）．(1)式を解くことで，NPの系内数分布や呼損率のような評価尺度が求められる．

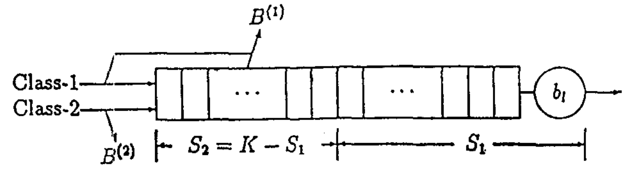

図 1　プッシュアウトを用いたモデル

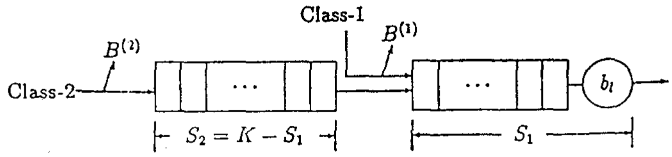

図 2　バッファ・リザベーションを用いたモデル

4.　スペース・プライオリティを用いたMMBP／G／1／Kモデル

仮定する2種類の客を，ここではクラス1，クラス2の客と呼び，クラス2の客の方が呼損率の上限に関してより厳しい要求をもち，クラス1の方は待ち時間の上限に関してより厳しい要求をもつものと仮定する．このようなクラスごとに異なる要求を同時に満たすようにするために，プッシュアウト（PO）およびバッファ・リザベーション（BR）と呼ばれる2種類のプライオリティを用いたモデルを考える．これらの方式では，大きさKのバッファを前（大きさ $S_1 \leq K$）と後（大きさ $S_2 = K - S_1$）とに分け，到着客の受け入れ方に関してそれぞれ異なった制御を行なう．バッファの状態で客の受け入れ方が決まるので，このような方法はスペース・プライオリティと呼ばれる．ちなみに，従来考えられてきたサービスの順序を変更する方式は，主に待ち時間に着目したものであり，これはタイム・プライオリティと呼ぶ．以下では同時に到着した客の集団の中ではクラス1の客の方が必ずクラス2の客よりも前にいるものとし，サービス時間は各クラスとも共通の分布に従うとする．

4.1　プッシュアウト方式

プッシュアウト方式では，以下のような制御を行なう．客の損失が起きないかぎりは，システムはあたかもクラスが1つしかないかのごとくふるまう．到着客と系内の客数の和がKを超えて，しかもバッファ内での順番がS_1を超えるようなクラス1の客がいた場合，NPならば損失とされたはずのクラス2の到着客が，列の一番後ろにいるクラス1の客を押し出して，かわりにバッファの最後方に並ぶことが許される．クラス1の客は，いったんバッファに並んだとしても，順番がS_1以下となるまでは，サービスを受けられなくなる可能性が残っていることになる．しかしながら，サービス時間分布が各クラス共通という仮定から，サービスを受けられなくなる客の総数は，NPの場合と変わらない．したがって，システムの系内数分布および全体の呼損率に関しては，3節の結果をそのまま用いることができる．クラスごとの呼損率の求め方は簡単ではないが，本論文ではn番目の位置にいるクラス1の客が最終的にサービスを受けられる確率の，nに関する再帰的な表現を導き，そこからクラス1の客の呼損率が求められる．クラス2の客の呼損率はクラス1の客の呼損率と全体の呼損率からただちに求められる．

4.2　バッファ・リザベーション方式

バッファ・リザベーション方式では，プッシュアウト方式とは異なり，S_1より後ろの順番にクラス1の客が並ぶことは許されず，クラス2の客のみが並ぶことができる．したがって，系に空きがある場合でも，（クラス1の）客の損失が起こりうる．このことは，解くべき状態方程式系(1)が，NPあるいはPOとは異なったものとなる（具体的には，行列AV，CVの要素）ことを意味している．しかし，一度状態方程式を解き終えたならば，客のクラスごとの呼損率はPOの場合よりも容易に求められる．なぜならば，客はその到着時点でのみ損失となりうるので，到着時点での系内数分布さえわかればクラスごとに呼損率が求められるからである．到着時点での分布というのは一般には定常状態の分布とは異なるが，両者は Conditional GASTA と呼ばれる性質で関係づけることができる．

5. 数値計算

$M=2$，単位サービス（$b_1=1$）として，S_1の値とクラスごとの呼損率の関係や，客の到着率と，呼損率の上限を保証するために必要なバッファサイズとの関係について，NP，PO，BRそれぞれの場合について数値計算を行ない，比較を試みた．結果として，PO，BRのNPに対する優位性が確認され，POとBRとでは，比較する条件をどう決めるかで評価が変わることがわかった．なお，詳しい条件および結果については，本論文を参照されたい．

学生論文賞受賞論文　　要約

一般化グルーピング問題

伊藤　稔

（東海大学大学院工学研究科経営工学専攻　現所属：日本ユニシス）

指導教官　羽田隆男助教授

1. はじめに

多数の対象を，対象間の類似度に注目して，複数のクラスターに分割する問題をとりあげる．

多数の対象を，その対象間の類似度に注目してグループ分けをする問題は，同次クラスター問題として古くから一般に知られており，統計学等の分野に応用されている．一方，配送計画や工程のライン編成問題など経営工学的な諸問題に，この同次クラスター問題を適用しようとすると，分割するクラスター数の制約だけでなく，各クラスターごとに使用できる資源に制約が加わる問題となることが多い．

たとえば，配送計画では，配送センターの商品を多数の配送先に，複数のトラックで配送しようとすると，各トラックが受けもつ配送先が1つのクラスターであり，所有するトラック台数がクラスター数の制約，クラスター内の配送先への総配送量とトラックの積載量制限との関係が資源制約となる．

本修士論文では，クラスター数と資源に制約のあるクラスター問題を「一般化グルーピング問題」と称し，分枝限定法にもとづき，より効果的な解法を考え，計算時間の面からその実用性を検討する．

2. 一般化グルーピング問題の解法

対象の集合$N=\{1, 2, \ldots, n\}$と，対象i，$j\in N$間の類似度d_{ij}（値が小さいほど類似していると見なす）が与えられているとき，0−1変数x_{ij}を

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{対象 } i \text{ が，対象 } j \text{ を中心としたグループに含まれる場合}\\ 0, & \text{その他の場合}\end{cases}$$

とすると，一般化グルーピング問題（G）は，同次クラスター問題における各グループに，

$$\sum_{i\in N} a_i x_{ij} \leqq C,\quad j\in N$$

ただし，a_i（$\geqq 0$，$i\in N$）：対象iが使用する資源の量

C　（$\geqq a_i$，$i\in N$）：各グループが使用できる資源の総量

であるナップザック制約を付け加えて得られる問題，

$$(G)\quad \begin{cases} \min \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}\, x_{ij} \\ \text{s.t.} \\ \quad \sum_{i\in N} x_{ij}=1,\quad j\in N \quad \cdots\cdots\cdots(1) \\ \quad \sum_{j\in N} x_{jj}=k, \quad \cdots\cdots\cdots(2) \\ \quad x_{ij}\leqq x_{jj},\quad i,\ j\in N \quad \cdots\cdots\cdots(3) \\ \quad \sum_{i\in N} a_i x_{ij}\leqq C,\quad j\in N \quad \cdots\cdots(4) \\ \quad x_{ij}\in\{0,\ 1\},\quad i,\ j\in N \cdots\cdots(5) \end{cases}$$

を考える．

ここで，対象jを中心としてグループを構成するか否かを判断する0−1変数x_{jj}，$j\in N$を，それ以外の変数と明確に区別するため，以下では便宜上0−1変数y_j，$j\in N$と表現する．

解法としては，分枝限定法の下界値計算に，(1)式を目的関数に組みこんだラグランジェ緩和問題（$L_\mu|x,\ y$）