研究レポート

対話形式による不完全一対比較行列からのウェイト計算法

山口 俊和，鈴木 敦

1. はじめに

代替案の中から複数の評価基準のもとで最も望ましい案を選択する方法の1つとして，Saaty が開発したAHP（Analytic Hierarchy Process）がある［7］，［8］．AHPは企業体およびその他の組織体の種々の計画分野で利用されており，その有用性はすでに確認されているが，実用上改善すべき点もいくつか存在する．

本論文では，AHPの改善すべき点として次の3点をあげて検討する．

(1) 比較しにくい要素に対しても一対比較を行なわなければならない点

(2) 評価基準，代替案の数が大きい場合に，一対比較の回数が膨大になる点

(3) すべての一対比較が完了するまで，整合性のない一対比較値のチェック，修正が行なえない点

これらに対して，Harker の2種類の不完全一対比較［3］，［4］を基本にし，逐次的に整合性のない一対比較値をチェックしながら修正を行なう対話形式による不完全一対比較のアルゴリズムを提案する．

2. AHPの問題点

AHPでは，問題を評価基準のレベルと代替案のレベルというように階層構造化し，意思決定者の主観的な一対比較から，各評価基準に与えるウェイト（重み）と各評価基準ごとに評価したそれぞれの代替案の評価値とを求め，それらを合成して代替案の総合評価値を計算する．

ウェイト計算の基本になる一対比較行列は，要素 i と要素 j の一対比較値を a_{ij} とすると

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

で表わされる．ここで，$a_{ji}=1/a_{ij}$ である．ウェイト・ベクトルを $\boldsymbol{w}^T=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ とすると，$a_{ij}=w_i/w_j$ と考えられ，

$$A=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \vdots & w_n/w_n \end{bmatrix}$$

となる．ここで，

$$A\boldsymbol{w}=n\boldsymbol{w} \tag{1}$$

となり，$\boldsymbol{w}$ は A の最大固有値に対応する固有ベクトルとして求められる．

AHPは，

ⓐ 意思決定者の主観的評価が取り入れられる

ⓑ 質的な評価基準を扱うことができる

ⓒ 一対比較の整合性のチェックが行なえる

ⓓ 計算が簡便である

という理由等で広範に利用されている．

しかしながら，なお実用上改善すべき点もいくつか存在する．本論文で改善対象とする点は以下の3点である．

(1) AHPでは，意思決定者がすべての一対比較を行なうことを前提としているが，すべての一対比較が容易に行なえる場合は現実には少なく，AはBよりも「若干重要」（3倍のウェイト）なのか，「重要」（5倍のウェイト）なのかの判断が困難である一対比較の箇所が存在することが多い．このように判断にあいまいさが存在することが多い．このように判断にあいまいさが存在する場合に対するアプローチとして，Saaty 他［9］の区間判断を許す方法，Lootsma［5］や Buckley［1］のファジィ数で与える方法などがあるが，いずれも意思決定者の作業量と計算量の増加，解析の

やまぐち　としかず　東京理科大学
すずき　あつし　㈱ソニー
受理　91.7.31　再受理　91.10.29

複雑さといった点から実用的とはいえない．これに対して，Harker［3］による明確に行なえない比較をパスする不完全一対比較は有効な方法であるが，後述のような問題点が存在する．

(2) AHPでは評価基準，代替案の数が大きくなると，一対比較の回数が増加し，意思決定者の負担が増大する．これに対して，Harker の一対比較の回数を積極的に減少させる方法があるが，後述のように問題点が存在する．

(3) AHPでは，すべての一対比較が終了するまで整合性のない一対比較値のチェックおよび修正が行なえない．すべての一対比較が終了してから一対比較値を修正する方法としては増田［6］の方法があるが，実際には，一対比較の途中で一対比較値を調べながら必要に応じて修正できる方が望ましい．

本論文では，(1)と(2)に対する改善方法として，Harker の2つの方法を合成した不完全一対比較法を検討する．(3)に対する改善方法としては，増田の方法を拡張し，逐決的に一対比較値をチェックしながら修正を行なう方法を検討する．さらに，これらを総合して，整合性のない一対比較値の逐次チェック，修正を対話的に行なう不完全一対比較のアルゴリズムを提案する．

3. 不完全一対比較の考え方

Harker は空白要素のある一対比較行列（不完全一対比較行列と呼ぶ）からAHPウェイトを計算する方法を2種類提案している．これらの方法によると，部分的に一対比較をパスしてもウェイトの計算が行なえるので，判断にあいまいさが存在する場合や，問題が大規模で意思決定者の判断の負担が大きな場合には有効な方法であると考えられる．

Harker の第1の方法［3］は，意思決定者が一対比較を明確に行なえないと判断した場合に，その一対比較をパスして空白要素とした不完全な一対比較行列からウェイトを計算する方法である．これは，比較しにくい要素をパスすることに重点をおいた方法であり，手順は以下のようである．

① 比較しにくい要素をパスし，空白要素のままで不完全一対比較行列Aを作成する．ただし，要素数をnとすると，最低限必要な一対比較の回数は（$n-1$）回であり，一対比較の関係を有向グラフで表現した場合，グラフが1本の木（spanning tree）になっている必要がある．

② 不完全一対比較行列Aのすべての空白要素には，整合性があるものと仮定し，対応するウェイトの比率（w_i/w_j）を代入して，不完全一対比較行列を表現しなおしそれをとAする．

③ ウェイト・ベクトルを $\boldsymbol{w}^T=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$ とすると，固有値問題は $B\boldsymbol{w}=\lambda \boldsymbol{w}$ となる．この式を展開して整理したものを新たに $C\boldsymbol{w}=\lambda \boldsymbol{w}$ とする．ここで，行列Cは不完全一対比較行列Aの空白要素を0で置き換え，かつi行の対角要素をAのi行にある空白要素の個数に1を加えたものでおきかえたものになっている．

④ 行列Cの最大固有値に対応する固有ベクトルを求め，これをウェイトにする．

この方法は，空白要素の値を埋めなくても簡単にウェイト計算できるという長所をもっているが，

(a) 一対比較の要素が多い場合に，一対比較の回数を積極的に減少させるアルゴリズムが確立されていない．

(b) すでに得られた一対比較の値を利用して空白要素を埋めるので，一対比較に整合性がない場合には，整合性のない一対比較値にウェイトが影響を受けやすい．

という短所を持っている．

Herker の第2の方法［4］は，最低限必要な一対比較を行なったあとで，一対比較を1つ追加するごとにウェイトを計算し，適当な終了基準を設定して一対比較の回数を積極的に減少させる方法である．手順は以下のようである．

① Herker の第1の方法と同様に，要素数をnとした場合，最低限必要な（$n-1$）回の一対比較を行ない，完全一対比較行列を作成する．

② 不完全一対比較行列の空白要素の値を（$n-1$）個の値を使っていったん埋める．すなわち，不完全一対比較行列を有向グラフで表現し，ランダムにいくつか選んだ間接的なパスの値の幾何平均値を該当する空白要素の値とし，完全一対比較行列Aを作成する．

③ 一対比較行列Aの最大固有値に対応する固有ベクトルを求め，各要素のウェイトにする．

④ 設定された終了基準（α^*）を満足するかどうかを判断する（なお，1回目は終了の判断は行なわず次の⑤に進む）．

$$\alpha^{(k)}=\max_i \frac{|w_i^{(k)}-w_i^{(k-1)}|}{w_i^{(k-1)}} \tag{2}$$

と定義し，$\alpha^{(k)} \leqq \alpha^*$ ならば⑦へ，$\alpha^{(k)} > \alpha^*$ ならば⑤へ

進む（Harker は $\alpha^*=0.05$ としている）.

ここで，上式において $i=1,2,\cdots,n$ で，

k：行なった一対比較の回数（アルゴリズムの途中で行なわれた判断の回数）

$w_i^{(k)}$：k 回の一対比較から求められた第 i 要素のウェイト

である．

⑤ ②で作成した完全一対比較行列 A を用いて，次式で示される各空白要素の値 a_{ij}（i，j は空白要素に対応した添え字）に対するウェイト・ベクトル $\boldsymbol{w}$ の感度係数を計算する．

$$\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial a_{ij}}=([A-\lambda_{\max}]_1)^{-1}\cdot \left[\left(v_i w_j-\frac{v_j w_i}{(a_{ij})^2}\right)[\boldsymbol{w}]_0-[\boldsymbol{x}]_0\right] \tag{3}$$

ここで，

$\lambda_{\max}$：一対比較行列 A の最大固有値

$\boldsymbol{w}$：一対比較行列 A の最大固有値に対する固有ベクトル

$\boldsymbol{v}$：A^T の最大固有値に対する固有ベクトル（$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}=1$ に基準化）

$\boldsymbol{x}$：j 番目の要素が w_j，$i(i>j)$ 番目の要素が $-w_i/(a_{ij})^2$ で，他の要素は0の n 次の列ベクトル

$[A-\lambda_{\max}]$：行列 $A-\lambda_{\max}$ の第 n 成分のみをすべて1で置き換えた $n\times n$ 行列

$[\boldsymbol{w}]_0$：ベクトル $\boldsymbol{w}$ の第 n 成分のみを0で置き換えたベクトル

$[\boldsymbol{x}]_0$：ベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 n 成分のみを0で置き換えたベクトル

⑥ 感度係数の各要素の平方和が最大になる空白要素に対する一対比較を追加する．ただし，比較しにくいならば，2番目以下の空白要素の比較を行なってもよい．②に戻る．

⑦ 終了する．最低限必要な（$n-1$）回の一対比較を含め合計 k 回の一対比較を行なって終了する場合，$w_i^{(k-1)}$ を各要素の最終的なウェイトとする．

この方法の長所は以下のようである．

(a) 設定した終了基準のもとで，ウェイトの信憑性を損なわない程度に一対比較の回数を減少させることができる．

(b) 次に行なうべき一対比較の場所を情報として示すことができる．

一方，短所は以下のようである．

(a) 空白要素の値として，ランダムな間接的なパスの値の幾何平均値を用いているので，パスのとりかたによって値が変わる．

(b) ウェイトの計算量が多い．

(c) 一対比較の回数が少ないうちに終了した場合，ウェイトの信憑性が保てないことがある．

(d) すでに得られた一対比較の値を利用して空白要素を埋めるので，一対比較に整合性がない場合には，整合性のない一対比較値にウェイトが影響を受けやすい．

4. 提案する方法

上述した Harker の2つの方法の長所を組み合わせて不完全一対比較のアルゴリズムを作成する．2つの方法を検討した結果，ウェイト計算には，計算量が少なく，空白要素を埋めずに計算が行なえる Harker［3］の方法を採用する．完全一対比較行列の作成方法（空白要素の埋め方）は，各空白要素の値を Harker［3］で求めたウェイトの比 w_i/w_j を用いて埋めることにする．アルゴリズムの全体的な流れは Harker［4］を基本とし，終了基準は $\alpha^*=0.05$ とする．

さらに増田［6］の方法を拡張して，一対比較を行なうごとに一対比較値の整合性のチェック，修正が行なえるような手順も追加する．増田の方法は，すべての一対比較が終了したあとで，一対比較行列の各要素に対する整合度（C. I.）の感度係数（整合度を一対比較値で偏微分した値）を計算し，全体の整合度を高めるためにその値が最大となる一対比較値を修正する方法である．この増田の方法を，一対比較を行なうごとに一対比較値のチェックおよび修正ができるように改善する．

提案するアルゴリズムを以下に示す．

① 最低限必要な（$n-1$）回の一対比較を行ない，不完全一対比較行列を作成する．

② 不完全一対比較行列から Harker［3］の方法により，各要素のウェイト，C. I.（Consistency Index：整合度）および C. R.（Consistency Ratio：整合比）を求める．なお，C. R. の計算に必要なランダム整合度は，Forman［2］が示した不完全一対比較用の数字を利用するが，Forman は n（要素数）7以下の場合のみを計算しているので，$n\geqq 8$ の場合については別に計算しておく必要がある．

③ 不完全一対比較行列より，すでに与えた各一対比較値に対する C. I. の感度係数を次式で計算する．ただ

し，1回目はパスして⑦へ．

$$\frac{\partial \mathrm{C.I.}}{\partial a_{ij}}=\left|\frac{1}{n-1}\left(v_iw_j-\frac{v_jw_i}{(a_{ij})^2}\right)\right| \quad (4)$$

④　②で求めた C. I.，C. R. の値，および③で求めた感度係数が最大で整合性がないと考えられる一対比較と，整合性があると仮定した場合に予測される一対比較値（予測値）をもとに，すでに行なった一対比較を修正するか，あるいは修正は行なわないで新しく一対比較を追加するかを決定する．ここで，予測値は②で求めたウェイトの比を計算し，その値に最も近い一対比較値（1, 2,…,9 および 1／2, 1／3,…, 1／9）とする．修正する場合は⑤へ，修正を行なわないで新しく一対比較を追加する場合は⑥へ進む．

⑤　一対比較の値を修正する．②に戻る．

⑥　Harker［4］で示された(2)式の計算を行なって，終了するかどうかの判定を行なう．終了と判定された場合には⑨へ進む．$\alpha^*=0.05$ とする．

⑦　空白要素の値を②で求めたウェイトの比を用いて埋め，完全一対比較行列を作成する．この行列を用いて，すべての空白要素に対するウェイト・ベクトル w の感度係数を Harker［4］の(3)式を用いて計算する．

⑧　⑦で求めた感度係数が最大になる空白要素について一対比較を行なう．ただし，比較しにくい場合には，2番目以下の空白要素の比較を行なってもよい．②に戻る．

⑨　終了する．最低限必要な $(n-1)$ 回の一対比較を含め合計 k 回の一対比較を行なって終了する場合，$w_i^{(k-1)}$ を各要素の最終的なウェイトとする．

5. 数値例

要素数が5個の数値例を用いて提案する方法でウェイトを計算する．

①　表1のように最低限必要な一対比較を行ない，不完全一対比較行列を作成する．これをグラフで示すと図1のようになる．

表1　最低限必要な一対比較

	①	②	③	④	⑤
①	1	2	—	—	—
②	1／2	1	3	—	4
③	—	1／3	1	1／6	—
④	—	—	6	1	—
⑤	—	1／4	—	—	1

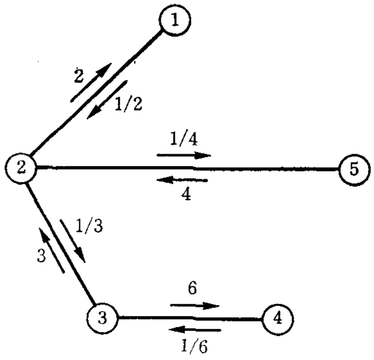

図1　グラフによる表示

②　各要素のウェイトは $w_1^{(4)}=0.3603$, $w_2^{(4)}=0.1798$, $w_3^{(4)}=0.0595$, $w_4^{(4)}=0.3553$, $w_5^{(4)}=0.0451$ となる．また，$\lambda_{\max}=5.000$, C. I.=0.000, C. R.=0.000 である．

⑦　②で求めたウェイトの比を用いて空白要素を埋めた完全一対比較行列は表2のようになる．各空白要素に対するウェイト・ベクトルの感度係数は表3のようになる．

⑧　感度係数が最大の空白要素（5, 1）の一対比較を行ない，1／5を入れる（空白要素（1, 5）には，5を入れる．表4参照）．

②　表4の行列から各要素のウェイトを計算すると，$w_1^{(5)}=0.3305$, $w_2^{(5)}=0.1910$, $w_3^{(5)}=0.0613$, $w_4^{(5)}=$

表2　完全な一対比較行列

	①	②	③	④	⑤
①	1	2	6	1	8
②	1／2	1	3	0.50	4
③	0.17	1／3	1	1／6	1.33
④	1	2	6	1	8
⑤	0.13	1／4	0.75	0.13	1

表3　感度係数

空白要素	感度係数	空白要素	感度係数
(1, 3)	0.010	(3, 1)	0.351
(1, 4)	0.100	(4, 1)	0.103
(1, 5)	0.007	(5, 1)	0.453
(2, 4)	0.145	(4, 2)	0.037
(3, 5)	0.011	(5, 3)	0.020
(4, 5)	0.007	(5, 4)	0.443

0.3606, $w_5^{(5)}=0.0566$ となる. また, C. I.=0.004, C. R.=0.020 である.

③ すでに与えた5箇所の一対比較値に対する C. I. の感度係数を計算すると**表5** のようになる.

④ 要素 (5, 1) の値を修正することにする.

⑤ 要素 (5, 1) の値を1/5から1/6に修正する (したがって, 要素 (1, 5) の値は6にする) (**表6**).

② 表6の不完全一対比較行列より, 各要素のウェイトは $w_1^{(5)}=0.3402$, $w_2^{(5)}=0.1861$, $w_3^{(5)}=0.0609$, $w_4^{(5)}=0.3613$, $w_5^{(5)}=0.0516$ となる. また, C. I.=0.002, C. R.=0.008 である.

④ ③で求めた C. I. の感度係数 (数値は紙面の関係で省略) を参考にし, 修正は行なわず一対比較を追加することにする.

⑥ $\alpha^{(5)}=0.12>\alpha^*=0.05$ なので⑦へ.

⑦ 完全一対比較行列を作成し, 各空白要素に対するウェイト・ベクトルの感度係数を計算すると**表7** のようになる.

⑧ 要素 (5, 4) に1/7を入れる (要素 (4, 5) には, 7を入れる. **表8** 参照).

表4 不完全一対比較行列

	①	②	③	④	⑤
①	1	2	—	—	5
②	1/2	1	3	—	4
③	—	1/3	1	1/6	—
④	—	—	6	1	—
⑤	1/5	1/4	—	—	1

表5 C. I. の感度係数

比　較	感度係数	比　較	感度係数
(1, 2)	0.007	(2, 1)	0.029
(1, 5)	0.003	(5, 1)	0.079
(2, 3)	0.001	(3, 2)	0.009
(2, 5)	0.004	(5, 2)	0.068
(3, 4)	0.012	(4, 3)	0.001

表6 不完全一対比較行列

	①	②	③	④	⑤
①	1	2	—	—	6
②	1/2	2	3	—	4
③	—	2/3	1	1/6	—
④	—	—	6	1	—
⑤	1/6	1/4	—	—	1

表7 感 度 係 数

空白要素	感度係数	空白要素	感度係数
(1, 3)	0.010	(3, 1)	0.316
(1, 4)	0.105	(4, 1)	0.093
(2, 4)	0.146	(4, 2)	0.039
(3, 5)	0.014	(5, 3)	0.020
(4, 5)	0.008	(5, 4)	0.444

表8 不完全一対比較行列

	①	②	③	④	⑤
①	1	2	—	—	6
②	1/2	1	3	—	4
③	—	1/3	1	1/6	—
④	—	—	6	1	7
⑤	1/6	1/4	—	1/7	1

② 各要素のウェイトは $w_1^{(6)}=0.3384$, $w_2^{(6)}=0.1858$, $w_3^{(6)}=0.0612$, $w_4^{(6)}=0.3632$, $w_5^{(6)}=0.0515$ となる. また, C. I.=0.001, C. R.=0.004 である.

④ ③で求めた C. I. の感度係数 (数値は省略) を参考にし, 修正は行なわず一対比較を追加することにする.

⑥ $\alpha^{(6)}=0.005=\alpha^*$ なので⑨へ.

⑨ 終了. 最終的なウェイトは $w_1=0.3402$, $w_2=0.1861$, $w_3=0.0609$, $w_4=0.3613$, $w_5=0.0516$ となる.

6. おわりに

本論文では, Harker が提案した2種類の不完全一対比較を組合せ, 逐次的に整合性のない一対比較値をチェックしながら修正を行なう実用的な不完全一対比較の対話型のアルゴリズムを作成した.

終了基準は $\alpha^*=0.05$ としたが, これよりもゆるい基準, きつい基準も設定しておき, 自由に選択できるようなアルゴリズムも考えられる. また, この方法では, ウェイトの感度係数が最大の空白要素から順に値を入れていくが, 各要素の一対比較回数が一定でないため, 比較回数の少ない要素のウェイトの信憑性が薄くなる. そこで, 各要素の一対比較の回数をそろえるため, 実験計画法のPBIB (一部釣合型不完備ブロック法) の利用も考えられる.

参 考 文 献

[1] Buckley, J. J.: "Fuzzy Hierarchy Analysis", Fuzzy Sets and Systems, pp. 233-247, Vol. 17

(1985).
[2] Forman, E. H.: "Random Indices for Incomplese Pairwise Comparison Matrices", European Journal of Operational Research, pp. 153-155, Vol. 48 (1990).
[3] Harker, P. T.: "Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process", Math. Modeling, pp. 353-360, Vol. 9, No. 3-5 (1987).
[4] Harker, P. T.: "Incomplete Pairwise Comparison in the Analytic Hierarchy Process", Math. Modeling, pp. 838-848, Vol. 9, No. 11 (1987).
[5] Lootsma, F. A.: "Performance Evaluation of Nonlinear Optimization Methods via Pairwise Comparison and Fuzzy Numbers", Mathematical Programming, pp. 93-114, Vol. 33 (1985).
[6] 増田達也："AHPにおける整合度および相対的重要度の感度係数", 電子情報通信学会論文誌A, pp. 1562-1567, No. 11, Vol. J70-A (1987).
[7] Saaty, T. L.: Analytic Hierarchy Process, McGraw-Hill (1980).
[8] Saaty, T. L.: Decision Making for Leaders, Wadsworth (1982).
[9] Saaty, T. L. and Vargas, L. G.: "Uncertainty and Rank Order in the Analytic Hierachy Process", European Journal of Operational Research, pp. 107-117, Vol. 32 (1987).
[10] 竹田英二："不完全一対比較行列におけるAHPウェイトの計算法", オペレーションズ・リサーチ, pp. 169-172, Vol. 34, No. 4 (1989).
[11] 刀根　薫：「ゲーム感覚意思決定法」, 日科技連出版社 (1986).

会合記録

3月10日(火)	庶務幹事会	9名
3月12日(木)	研究普及委員会	11名
3月13日(金)	企業サロン企画委員会	5名
3月17日(火)	国際委員会	6名
〃	IAOR委員会	2名
〃	理事会	17名
3月18日(水)	編集委員会	11名
3月27日(金)	論文誌編集委員会	6名
〃	企業サロン企画委員会	4名
3月30日(月)	庶務幹事会	8名

第6回理事会議題

(4—3—17)

1. 平成3年度第5回理事会議事録の件
2. 入退会の件
3. 新フェロー推薦の件
4. 平成4年度・5年度役員候補者の件
5. 学会賞授賞候補推薦の件
6. 各委員会報告

平成3年度研究部会・グループ終了経過報告の件
平成4年度セミナー終了報告の件
平成4年度本部定例講演会開催・収支予算案の件
平成3年度OR企業サロン終了報告および平成4年度計画の件
国際会議の件
平成3年度事業報告（案）および収支見込みの件
平成4年度事業計画（案）および収支予算（案）の件
RAMP特別会計報告の件

会友訃報

二宮　総蔵 氏

平成4年2月11日．肺ガンのためご逝去されました．享年66才

謹んでご冥福をお祈りいたします．

渡辺　茂 氏

都立科学技術大学学長．平成4年3月10日．肝臓結石のためご逝去されました．享年73才．

謹んでご冥福をお祈りいたします．