Binary Comparison における AHP 法とその他の方法との比較

福田　路子（筑波大学社会工学類経営工学専攻／現所属：ＮＴＴデータ通信）
（指導教官　高橋　磐郎）

1. 研究の目的

私たちは，政治政策レベルから日常レベルにいたるまで常に意思決定を行なっている．その中で数量化のできない問題に対しては，人間の勘を働かせ，洞察を加えながら問題の状況を把握し，意思決定の一助とする柔らかい意思決定方法を与える必要がある．その方法の１つに AHP 法がある．この方法は手軽な方法で日本でもかなり広まってきているが，本当に信頼性があるのか，またその他の意思決定の方法と比べて有効であるのか，論理的に評価する方法はまだ定まっていない．そこで本研究においては，AHP 法とその他の方法を比較し，どのような状況にどの方法が有効であるか，その方法そのものは有効であるか，検証を行なう．

2. 意思決定方法

比較を行なう AHP 法を中心とする３つの方法を示す．

完全情報の場合

- AHP（Analytic Hierarchy Process）法（［１］［６］［７］参照）
- LLS（Logarithmic Least Square）法（［７］参照）

不完全情報の場合

- LLS 法
- H-T（Harker-Takeda）法（［３］［４］参照）
- 2-stage 法（［３］参照）

AHP 法は階層図や固有値問題を用いた意思決定方法である．LLS 法は統計的手法を用いた方法で目的は AHP 法と同じである．また，H-T 法と 2-stage 法は AHP 法を発展させて，情報を十分に得ることができない場合にも意思決定を行なえる方法である．すべての情報を得ることができる（完全情報）場合には AHP 法と LLS 法を，またすべての情報を得ることができない（不完全情報）場合には LLS 法，H-T 法と 2-stage 法の比較を行なう．どの方法も大まかな手順は同じであるが，重み（重要度）の求め方が異なる．また，完全情報と不完全情報の場合では情報をデータ化する方法が異なる．そこで次にそれぞれについて説明する．

2.1 一対比較逆数行列の作成

どの方法も対象要素の重要さについて，２つずつ一対比較を行ない，一対比較逆数行列を次のように作成する．

$n\times n$ 一対比較逆数行列を

$$A=[a_{ij}]\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

とすると，要素 a_{ij} は次のように定義される．

$$a_{ij}=\frac{\text{要素}\, i\, \text{の重み}}{\text{要素}\, j\, \text{の重み}}$$

$$\begin{cases} i=j\ (\text{対角要素})\ \text{の場合} \quad =1 \\ i\neq j\ \text{の場合}\quad 9\,\text{点法, パラメータ法にしたがう.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (\text{表 1 参照}) \\ \text{一対比較が行なわれていない場合}\quad (\ \ ) \\ \text{すべての要素に対して}\quad \neq 0 \end{cases}$$

表１　９点法とパラメータ法

i is —— than j	９点法	パラメータ法
equally important	1	1
weakly more important	3	θ
strongly more important	5	θ^2
demonstrably or very strongly more important	7	⋮
absolutely more important	9	θ^m

＊ 2，4，6，8は，1，3，5，7，9の中間値（９点法）．
＊ ９点法の1，3，5，7，9と θ 法の1，θ，θ^2，θ^3，θ^4 は，対応するわけではない．

$$
\begin{pmatrix}
1 & \theta & \theta & 0 & \theta & 0 & 0 & 0 \\
1/\theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/\theta & 0 & 1 & \theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/\theta & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/\theta & 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & \theta & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/\theta & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/\theta & 0 & 1 & \theta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\theta & 1
\end{pmatrix}
$$

図1の一対比較逆数行列

$$a_{ji}=\frac{1}{a_{ij}}$$

よって，一対比較逆数行列Aは次のようになる．

・完全一対比較逆数行列（AHP 法，LLS 法）

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots 1 \end{pmatrix}$$ 全一対比較が行なわれた（完全情報）場合

・不完全一対比較逆数行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & (\ ) \\ 1/a_{12} & 1 & (\ ) & (\ ) \\ 1/a_{13} & (\ ) & 1 & a_{34} \\ (\ ) & (\ ) & 1/a_{34} & 1 \end{pmatrix}$$ すべての一対比較が行なえなかった（不完全情報）場合

一対比較が行なわれていない a_{ij} には(　)を入れる．

H-T 法，2-stage 法においては，作成された不完全一対比較逆数行列から完全一対比較逆数行列を作り出す．詳しくは［3］［4］を参照．

2.2 重み（重要度）の計算

重みというのは，選択の際に各代替案がどれくらい重要であるかを表わした数値である．それぞれ作成された一対比較逆数行列から次の方法で求められる．

・固有値法（AHP 法，H-T 法，2-stage 法）

作成された完全一対比較逆数行列の最大固有値に対する固有ベクトルを正規化した固有ベクトルを重みとする．

・最小二乗法（LLS 法）

作成された（不）完全一対比較逆数行列の要素を

$$a_{ij}=\frac{w_i\ (\text{要素 } i \text{ の真の重み})}{w_j\ (\text{要素 } j \text{ の真の重み})}e_{ij}\ (\text{誤差})$$

と仮定し，誤差 e_{ij} の対数の2乗和が最小になるような実際の重みを求める．

3. 比較方法

それぞれの方法のどれが一番有効であるか論理的に評価する方法はまだ定まっていない．そこで Count 法と呼ばれる最も一般的に認められている方法と，尤度法を

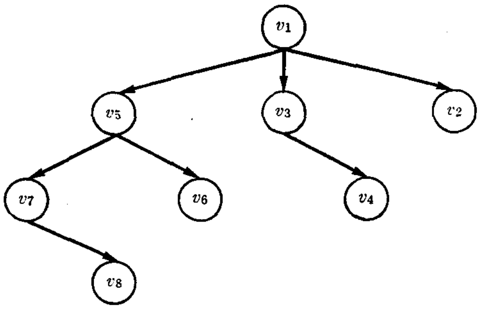


図3 有向グラフ

基準として，いくつかの例を通して数値的に比較してみる．

3.1 情報とそのデータ化

ここでは，比較を行ないやすいように情報を簡便化する必要がある．そこで，一対比較逆数行列Aを作成する際，パラメータ法（$\theta>1$）を用い，要素 i が要素 j より勝れているならば，$a_{ij}=\theta$，$a_{ji}=1/\theta$ とする binary comparison の場合を考える．またこれを $v_i \to v_j$ のような有向グラフで書く．$a_{ij}=\theta$ のとき，今後単に i は j に勝ったということにする．

3.2 比較方法論

各方法を比較するために尤度法と Count 法との相関を考える．

3.2.1 尤　度　法

この方法では，要素 i が要素 j に勝つ確率は，

$$f_{ij}(w)=\frac{w_i/w_j}{w_i/w_j+w_j/w_i}\ (1<i<j<n)$$

にしたがうものと考える．このとき尤度Lは，

$$L=\prod_{1<i<j<n} f_{ij}(w)$$

$$=\prod_{1<i<j<n}\frac{w_i/w_j}{w_i/w_j+w_j/w_i}$$

となる．wの個々の値に対するLの値がwの尤度，つまり，もっともらしさの度合となるので，各方法で求められたLの値が大きいほどその方法は有効であるといえる．

3.2.2 Count 法との相関

Count 法とは，binary comparison に対して，最も標準的と思われる方法で，各要素の勝負の価値をその相手の強さを考慮して評価しようというものである．たとえば図1で v_1 は3勝しているが，（2勝している）v_5 に勝った勝と（1勝しかしていない）v_3 に勝った勝では，その価値が違うと考える．さらに v_5 や v_3 自身の勝ちも相手の強さによって評価する．このように多段階

表 2 Count 法　結　果

	尤度値	順位								相関係数
		要素 1	要素 2	要素 3	要素 4	要素 5	要素 6	要素 7	要素 8	
LLS 法	0.2097152	1 位	2 位	2 位	5 位	2 位	5 位	5 位	8 位	0.82143
H-T 法	0.2097092	1 位	2 位	2 位	5 位	2 位	5 位	5 位	8 位	0.82143
2-satge 法	0.0964134	1 位	5 位	3 位	8 位	2 位	6 位	4 位	7 位	0.97619
Count 法		1 位	5 位	3 位	7 位	2 位	6 位	4 位	8 位	

に評価を深めて総合評価をしようとするものである.(くわしくは本論文参照)

そして，Count法で求められた順位を基準として，各方法の順位との順位相関係数を求める．求められた相関係数の値が 1 に近いほど有効な方法とする.例として,図 1 のCount法の順位と各方法の重みの順位，また Count 法の順位との相関係数値を各方法ごとに表 2 に示す．この場合，2-stage 法の相関係数値が最も 1 に近いので 2-stage法が一番有効であるといえる．

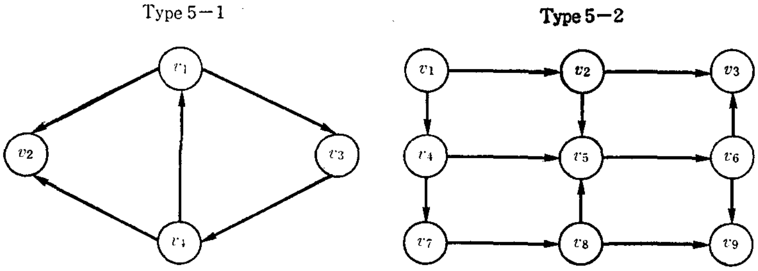


図 2　特 別 な 場 合

4. 比較方法にもとづいた数値実験の結果および検証

比較の根拠である Count 法を基準として，これに近いものが有効であろうという観点から，Count 法で順位相関係数値を求めてみることにする．また参考のため尤度法を考えてみた．実際にいろいろな一対比較逆数行列を与え，各方法で重みを計算する．計算された重みから尤度法を用いて各方法の尤度値を求め，Count 法を用いて各方法の順位相関係数値を求める．そして，それらの結果から，どのような状況にどの方法が有効であるか，またその方法そのものは有効であるか，検証を行なう．

4.1 数値実験のための一対比較逆数行列作成

次の 5 種類の一対比較逆数行列を作成して数値実験を行なう．

完全情報の場合（AHP 法，LLS 法の比較）

・完全整合の場合（Type 1)…要素数 4 ～ 9 個

・ランダムな場合（Type 2)…要素数 4 ～10個（各10個）

不完全情報の場合（LLS 法，H-T 法，2-stage 法の比較）

・一対比較の回数を徐々に減少させた場合（Type 3）

要素数 9 個（一対比較回数27，18，19回の場合を各10個）

要素数10個（一対比較回数35，25，15回の場合を各10個）

・トーナメント戦方式の場合（Type 4）

要素数 4 ～ 9 個（勝ち抜きパターンすべて考える）

・特別な場合（Type 5)…図 2

4.2 数値実験結果と分析

数値実験結果をグラフ化し，分析を行なう．例として Type 2～5 の各方法の相関値の平均値を図 3 のグラフに示す．

5. 結　　論

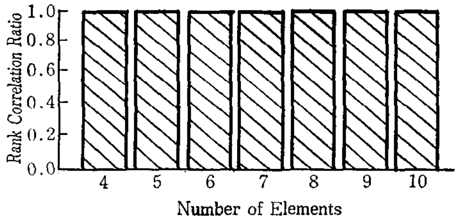
分析結果を簡単にまとめると完全情報の場合，行列の整合性がかなり高い場合にはどの方法も有効性はある．整合性がそれほど高くない場合には LLS 法が有効であるといえる．不完全情報の場合，一対比較回数が全一対比較回数の 1/4 前後以上ある場合には LLS 法の有効性が最も高いといえる．一対比較回数が全一対比較回数の 1/4 前後以下しかない場合，特にトーナメント戦方式の場合には 2-stage 法が有効であるといえる．

よって数値実験結果より，AHP 法を含むその他の方法どれも有効性がないとはいえない．残念ながら，完全情報において AHP 法が特に有効であるともいえない

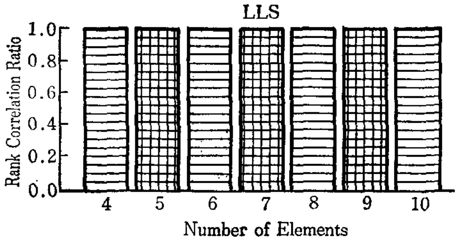
Comparison of Rank Correlation Ratio in Complete Matrix

Type 2

Average of Rank Correlation Ratio
AHP



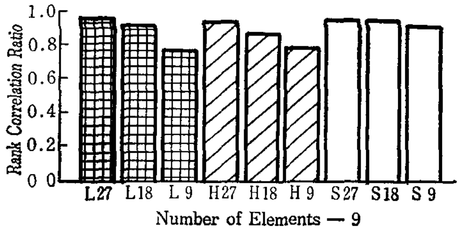
Average of Rank Correlation Ratio
LLS



Comparison of Rank Correlation Ratio in Imcomplete Matrix

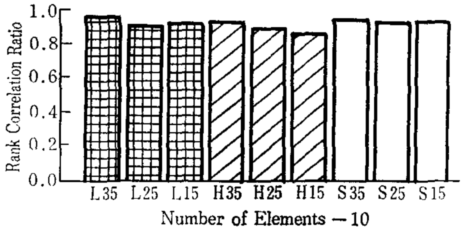
Type 3-9

Average of Rank Correlation Ratio
ALL



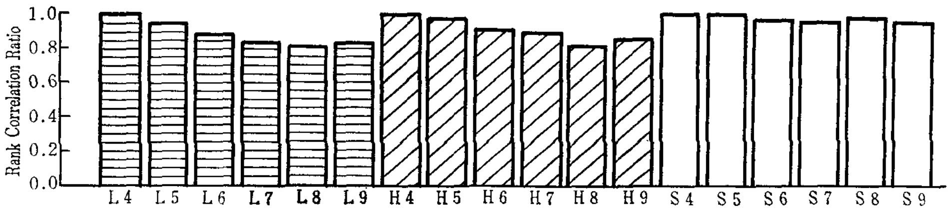
Type 3-10

Average of Rank Correlation Ratio
ALL



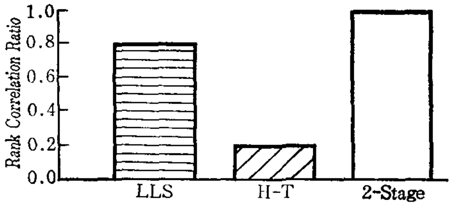
Type 4 (Tournament)

Average of Rank Correlation Ratio
ALL



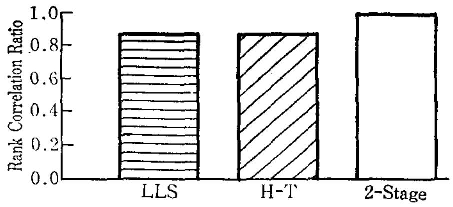
Type 5 (Special Case)

Rank Correlation Ratio
Type 5-1



Number of Elements — 4
Number of Comparisons — 5

Rank Correlation Ratio
Type 5-2



Number of Elements — 9
Number of Comparisons — 12

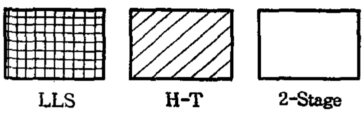


図 3 順位相関係数値平均のグラフ

ことがわかった．また LLS 法と 2-stage 法は状況によって使いわけられればかなり有効であるということがいえる．これらの検証結果を意思決定を行なう際に参考にし，どの方法がよいか吟味していただきたい．

参考文献

[1] Thomas L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, Decision Support Software Inc., 1988.

[2] I. Takahashi, Analysis of AHP by BIBD, *J. of O. R.Society of Japan*, Vol. 33, No. 3, March 1990.

[3] I. Takahashi, AHP analysis of Binary and Ternary Comparisons in incomplete information, *Institute of Socio-Economic Planning, Discussion Paper Series* No. 420, October 1989.

[4] E. Takeda and P. L. Yu, Eliciting the Relative Weight from Incomplete Reciprocal Matrices, *International Symposium on the Analytic Hierarchy Process*, 1988.

[5] 伊理正夫，藤重　悟，大山達雄，グラフ・ネットワーク・マトロイド，産業図書，1986.

[6] 刀根　薫，ゲーム感覚意思決定法，日科技連出版社，1988.

[7] 刀根　薫，真鍋龍太郎，AHP 事例集，日科技連出版社，1990.

学生論文賞受賞論文　　要約

ごみ処理施設の最適配置に関する研究

—時系列 ARIMA モデルと混合型整数計画モデルの適用—

室谷　洋一（埼玉大学大学院政策科学研究科　現所属：横浜市役所）

（指導教官　大山　達雄）

1.　研究の目的

横浜市では，ごみの焼却処理に取り組み，100％焼却を達成している．しかし，ごみ排出量は年々増加し，しかも，最初に建設した焼却工場の寿命もあと数年にせまっているため，今後なお数カ所の工場が必要になると予想されている．本研究では，現在計画中の横浜市における「将来のごみ処理施設の建設計画」に対して，時系列 ARIMA モデルと混合型整数計画モデルを適用して，ごみ処理量の将来予測と経済的な輸送計画を考慮した最適建設計画の作成を試みる．

2.　研究の概要

研究の枠組みは下の構成図にもとづく．データは，横浜市環境事業局事業統計（昭和44～平成元年度）を使用する．

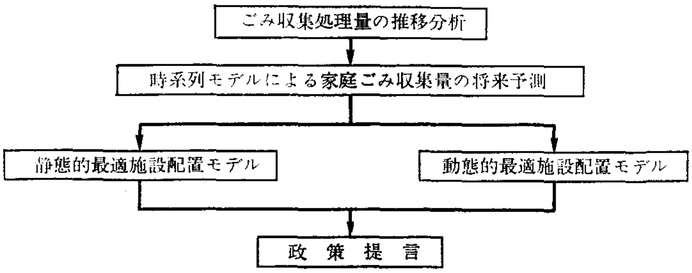


表 1　回帰モデルパラメタ推定結果

年　度	55	56	57	58	59	60	61	62	63	平元
a_1	0.208	0.216	0.219	0.217	0.220	0.220	0.226	0.229	0.237	0.245
b_1	0.662	0.682	0.694	0.683	0.687	0.683	0.697	0.702	0.720	0.737
b_1/a_1	3.18	3.16	3.17	3.14	3.12	3.10	3.08	3.07	3.03	3.01
1 世帯人員	3.00	2.98	2.95	2.93	2.91	2.91	2.89	2.86	2.83	2.79

3.　ごみ収集処理量の推移分析

家庭ごみ収集量を地域的に検討する．i 事務所の収集