

ベイズ法を用いた鋼消費量の 非定常回帰モデルと多国間比較への応用

姜 興起

1. はじめに

鉄鋼は一国の経済システムにおいて重要な役割を演じる。一方 GNP は、その国の経済システムの状態を表わす主要な指標である。経済システムの構造は、技術発展、流通機構などの緩やかな変化、あるいはオイルショックのような突然の外的環境の変化によって変り、また構造変化を反映して鋼消費量と GNP の間の関係も変化する。したがって、鋼消費量と GNP の間の関係を解析することによって、一国の経済システムの変化の一面をとらえることができる。

このダイナミックな関係を定量的にとらえることは、過去の経済発展の評価と今後の経済発展の予測・制御にとって重要である。また、多国間の鋼消費量と経済指標との関係の変化のパターンの比較も、意味深いことである。各国の技術・経済構造の特徴などをとらえて、経済政策の策定の参考にすることができる。さらに、動的特性に富む経済システムにおいて、経済指標間の関係をうまく表現できる新しいモデルを開発し、また、多くのモデルの中でよりよいモデルを選ぶ一般規準を示すことができれば、信頼性の高いモデルを応用して、意思決定や問題解決に活用することができる。これは OR の分野における理論と応用の両方に意義のある問題である。

ここで取り上げる問題は、計量経済学や統計学の分野で構造変化 (structural change) の問題として研究されている。何永綿と姜 [14] は中国の鋼消費量を予測するために、鋼消費量と GNP の関係について、回帰係数を時間変数の多項式とする非定常回帰モデルを導入した。Dufour の論文 [5] では回帰モデルにおける係数の変化のいくつかのパターンを列挙し、またそれぞれの検定法などを紹介している。文献 [4] では構造変化の

問題における理論と実際の整理・紹介が行なわれているが、主としてベイズ法とその応用例が取り扱われている。赤池 [1-3] は AIC (Akaike Information Criterion) の考え方をベイズ理論と結びつけることによって、ABIC (Akaike's Bayesian Information Criterion) というベイズ型情報量規準を提案している。これによってベイズモデルにもとづく統計的モデリングが実用化された。近年、この情報量規準にもとづいたベイズ法を応用した事例が多数報告されている [6-15]。

本稿では、ベイズ法を用いた鋼消費量と GNP との間の非定常回帰モデル (ベイズ型回帰モデルとも呼ばれる) の構成と推定法を論じ、また 7 カ国のデータに対して、ABIC によるモデルの適合性を評価する。その上で各国間の鋼消費量と GNP との関係の変化過程とその特徴の分析・比較を行なう。

2. モデルと推定

2.1 基本モデル

ここでは、鋼消費量と GNP と関係という具体的な問題について分析する。 y_t と x_t をそれぞれ t 年度 ($t=1, 2, \dots, n$) の鋼消費量と GNP の値とする。 y_t と x_t の関係について線形でかつその構造が安定であるという仮定を置けば、次のような線形回帰モデルによって表現される。

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t \quad (1)$$

ただし、 α と β は定数、 e_t は独立で同一の正規分布にしたがうと仮定する。このモデルでは β は単位 GNP の変化に対する鋼消費量の変化量を表わし、 α は GNP の変化に依存しない鋼消費量を表わしているものと解釈できる。したがって、 α と β の数値によって鉄鋼の消費という観点から見た 1 つの国の経済構造の説明が得られる。

しかし、前述のように長期的に分析すると、経済構造が変化しないという仮定は不自然であるので、モデル (1) と対比して、次の 2 通りの非定常回帰モデル (本

きょう こうき 総合研究大学院大学統計科学専攻
〒106 港区南麻布 4-6-7
受理 平成 2 年 11 月 26 日 再受理 平成 3 年 5 月 24 日

稿では、それらを「基本モデル」と呼ぶ)を考慮する。

$$y_t = \alpha + \beta_t x_t + \varepsilon_t. \quad (2)$$

$$y_t = \alpha_t + \beta x_t + \eta_t. \quad (3)$$

ただし、 α と β は定数、 ε_t と β_t は時間とともに変化するパラメータであり、以下ではこれらを確率変数として取り扱う。 ε_t と η_t をそれぞれ各 t について独立に $N(0, \sigma^2)$ にしたがる確率変数とする。

基本モデル (2) は (1) 式の x_t の係数 β が時間とともに変わるといふ仮説に対応して考えたものであるのに対して、基本モデル (3) は (1) 式の定数項 α が変わるという仮説に対応して考えたものである。当然、 α と β の両方が時間とともに変化するモデルも考えられるが、観測データが少ない場合には、パラメータの良い推定値が得られず、きわめて不安定なモデルになる危険があるので、本稿では除外した。

基本モデル (2) と (3) の中の β_t と α_t の時間による変化のパターンを表現するには多項式、三角関数やスプライン関数などいろいろ考えられる。しかし、これらの特定の関数族を採用するという事は、システムの「構造」に関してかなり強い主観的判断を下したことになる。このようなパラメトリックなモデルはそれぞれ固有の偏りをもっており、システムの構造を反映しない近似関数の「くせ」が出てしまう [13]。したがって、本稿では、ベイズ法を使ってノンパラメトリックな係数表現をもつ非定常回帰モデルの推定法を提案したい。

2.2 ベイズモデルと ABIC

まず、基本モデル (2) について議論を展開する。 n 個の観測値 y_1, y_2, \dots, y_n が得られた時、(2) 式をベクトルで表現すれば、次のように書ける。

$$y = \alpha \mathbf{1} + X\beta + \varepsilon. \quad (4)$$

ただし、

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & x_{n-1} & \cdot \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x_n \end{pmatrix}$$

$$y^T = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \beta^T = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n), \quad \mathbf{1}^T = (1, 1, \dots, 1)$$

基本モデル (2) に関する仮定によって、 $\varepsilon_n \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$ 、したがって、 y の確率密度関数は、

$$f(y|\beta, \alpha, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|y - \alpha \mathbf{1} - X\beta\|^2\right) \quad (5)$$

となる。ここで、 $\|\cdot\|$ は、ユークリッドノルムを表わす。

さらに、本稿では、 β に事前分布を導入することによって、 β も確率変数として取り扱う。 β_t が滑らかに変化することを期待して、 β に次のような確率的な制約を置く。

$$D\beta = \gamma + \nu. \quad (6)$$

ただし、

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^T = (\beta_0, 0, \dots, 0, \beta_{n+1}), \quad \nu^T = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n).$$

ここで ν_t は各 t について独立に $N(0, \tau^2)$ にしたがる確率変数とする。(6) 式は β_t の 2 階差分が各 t について独立に平均 0 分散 τ^2 の正規分布にしたがることを意味する。新たにパラメータ $d = \sqrt{\sigma^2/\tau^2}$ を導入し、 γ と d を超パラメータとして取り扱う。この時、 β の事前分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$\pi(\beta|\gamma, d) = \left(\frac{d}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n |D| \exp\left(-\frac{d^2}{2\sigma^2} \|\gamma - D\beta\|^2\right). \quad (7)$$

したがって、データ X と y が与えられた時のパラメータ α, σ, γ と d の尤度関数は次のように書き表わすことができる。

$$L(\alpha, \sigma^2, \gamma, d) = \int \dots \int f(y|\beta, \alpha, \sigma^2) \pi(\beta|\gamma, d) d\beta = \left(\frac{d}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n \frac{|D|}{\sqrt{|W(d)^T W(d)|}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|z(\alpha, \gamma, d) - W(d)\beta^*\|^2\right). \quad (8)$$

ただし、

$$W(d) = \begin{pmatrix} X \\ dD \end{pmatrix}, \quad z(\alpha, \gamma, d)^T = ((y - \alpha \mathbf{1})^T, d\gamma^T)^T, \quad \beta^* = E(\beta).$$

赤池 [1-3] はベイズ型情報量規準

$$ABIC(\alpha, \sigma^2, \gamma, d) = -2 \log L(\alpha, \sigma^2, \gamma, d) + 2k = n \left(\log \frac{2\pi\sigma^2}{d^2} \right) + \log \frac{|W(d)^T W(d)|}{|D|^2} + \frac{1}{\sigma^2} \|z(\alpha, \gamma, d) - W(d)\beta^*\|^2 + 2k. \quad (9)$$

を最小にするように、パラメータ $\alpha, \sigma^2, \gamma, d$ を推定することを提案している。 k は自由パラメータの数で、今の

場合 $k=5$ となる。

$ABIC(\alpha, \sigma^2, \gamma, d)$ を最小にする $\alpha, \sigma^2, \gamma, d$ を $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2, \hat{\gamma}, \hat{d}$ とし、事前分布として $\pi(\beta|\hat{\gamma}, \hat{d})$ を用いることにすると、ベイズの定理により、 β の事後分布は、

$$f(\beta|y) = \frac{f(y|\beta, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2)\pi(\beta|\hat{\gamma}, \hat{d})}{L(\hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2, \hat{\gamma}, \hat{d})} \quad (10)$$

と表わされる。そこで (10) 式を最大にする $\hat{\beta}$ を β の推定値として選ぶことにする。このような推定値は MAP (maximum a posteriori) 推定値といわれ、それは β の事後分布の期待値と一致している。

2.3 パラメータの推定と ABIC の計算

2.2 に示したように、(10) 式の最大化によって、 β の MAP 推定値が得られるが、(10) 式の分母は β を含まないので、 β の推定値はその分子

$$f(y|\beta, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}^2)\pi(\beta|\hat{\gamma}, \hat{d}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\|z(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{d}) - W(\hat{d})\beta\|^2\right) \quad (11)$$

の最大化によって求められる。明らかに、(11) 式の最大化は $\|z(\hat{\alpha}, \hat{\gamma}, \hat{d}) - W(\hat{d})\beta\|^2$ の最小化に帰着される。すなわち、任意の与えられた α, γ, d について最小二乗法

$$\|z(\alpha, \gamma, d) - W(d)\beta\|^2 \rightarrow \min \quad (12)$$

によって、先の推定値 $\hat{\beta} = \hat{\beta}(\alpha, \gamma, d)$ が得られ、それは σ^2 と独立である。

また、

$$V(d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X & 0 \\ 0 & p(d) & dD & q(d) \end{pmatrix}, \quad u^T = (y^T, 0^T), \\ p(d)^T = (-d, 0, \dots, 0), \quad q(d)^T = (0, \dots, 0, -d), \\ 0^T = (0, 0, \dots, 0), \quad \theta^T = (\alpha, \beta_0, \beta^T, \beta_{n+1}).$$

と置くと、(12) 式は次のようになる。

$$\|z(\alpha, \gamma, d) - W(d)\beta\|^2 = \|u - V(d)\theta\|^2 \rightarrow \min \quad (13)$$

これによって θ を推定することができる。すなわち、 α, γ, β をこの最小二乗問題を解くことによって同時に推定し、それらが d だけに依存することになる。このような θ の推定値を $\hat{\theta}(d)$ と書くことにしよう。このとき σ^2 の推定値は

$$\hat{\sigma}^2(d) = \frac{1}{n} \|u - V(d)\hat{\theta}(d)\|^2 \quad (14)$$

となり、ABIC は次式のように d だけの関数となる。

$$ABIC(d) = n \left(1 + \log 2\pi + \log \frac{\hat{\sigma}^2(d)}{d^2} \right) + \log \frac{|W(d)^T W(d)|}{|D|^2} + 2k \quad (15)$$

したがって、ABIC(d) の最小化によって d の推定値 \hat{d} が求められる。しかし、(15) 式から、 \hat{d} を解析的に

求めることができないので、 \hat{d} は数値的最適化によって求める。このように $\hat{\theta}(\hat{d})$ から $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ が決まり、最小 ABIC の $ABIC(\hat{d})$ も自然に求められる。

3. 異なる事前分布をもつベイズモデル

以上、基本モデル (2) と β に関する制約 (6) から得られるベイズ型回帰モデルの推定法とその ABIC の計算などについて述べた。同じ基本モデルに対しても別の制約を置くと、当然、対応するベイズモデルも変わる。いくつかの制約 (事前分布) が想定される時、ABIC を用いて最も「合理的」な制約を選択することができる。

このように考えると、 β に関する制約もいくつかのものが考えられる。たとえば、

$$\beta_t = \bar{\beta} + \delta_t; \quad t=1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$\beta_t - \beta_{t-1} = \lambda_t; \quad t=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

などの確率的な制約をおいてもよい。ここで、 δ_t と λ_t とも各 t ごとに独立で同一の正規分布にしたがう確率変数であると仮定している。すなわち、(16) 式は β_t の 0 階差分 (β_t と同じのもの) が正規分布であることを表わし、(17) 式は β_t の 1 階差分が正規分布であることを表わしている。

そこで 2 階差分の制約 (6) と比較するために、(16) 式と (17) 式の制約についてもベイズ型回帰モデルの作成・推定とその ABIC の計算を行なってみる。さらに基本モデル (3) に対しても、同じ考え方によって、 $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ に関する同じ形式の制約にもとづいたベイズモデルの作成と推定を行ない、ABIC を計算することができる。以上により、表 1 のように 6 通りのベイズ型回帰モデルが作成される。

表 1 6 通りのベイズ型回帰モデルの構造

| 番号 | 基本モデル | 定数項 α_t | 係数 β_t | 超パラメータ数 |
|----|---------|----------------|--------------|---------|
| A0 | モデル (3) | 0 階差分 | 定数 | 4 |
| A1 | モデル (3) | 1 階差分 | 定数 | 4 |
| A2 | モデル (3) | 2 階差分 | 定数 | 5 |
| B0 | モデル (2) | 定数 | 0 階差分 | 4 |
| B1 | モデル (2) | 定数 | 1 階差分 | 4 |
| B2 | モデル (2) | 定数 | 2 階差分 | 5 |

5. 結果と分析

5.1 最小 ABIC によるモデルの比較

分析の対象とする各国の 20 年間 (1960~1979) のデータに対して、それぞれの最小 ABIC を計算した。その

表 2 最小 ABIC の値

| 国別／モデル | A0 | A1 | A2 | B0 | B1 | B2 |
|--------|-----|-----|-------|-----|-----|------|
| 中国 | -16 | -29 | -37** | -16 | -20 | -26* |
| ソ連 | -12 | -29 | -48** | -13 | -36 | -40* |
| アメリカ | 45 | 33 | 24** | 45 | 40 | 36* |
| 日本 | 35 | 23 | 23* | 35 | 23 | 20** |
| 西ドイツ | 55 | 53 | 40** | 55 | 54 | 52* |
| 英国 | 64 | 60 | 52** | 64 | 61 | 57* |
| フランス | 47 | 42 | 33** | 47 | 39 | 35* |

結果（基準化されたデータによる計算結果）が表 2 に示されている。その中に、「**」と「*」の印は、それぞれ行の中の最小値と 2 番目の小さい値を示している。

ABIC を規準としてモデルの良さを評価する時に、同じデータに対する各種のモデルの（最小）ABIC の値の小さいモデルがより良いモデルと判別される。この規準によって表 2 の結果を分析すると、次のことがわかる。

- (a) 異なる事前分布をもつベイズモデル間の比較ではたとえば、モデル A2 が A0, A1 より良く、モデル B2 も B0, B1 より良いと判断される。すなわち、 α_t と β_t に関する 2 階差分の制約がより良く α_t と β_t の変動を表現することができる。
- (b) 異なる基本モデルにもとづくベイズモデル間の比較では、同じ 2 階差分の制約に関してモデル A2 のほうがモデル B2 よりよさそうである（日本だけ例外）。すなわち、ABIC によると、 α_t の変動性が β_t より顕著であり、日本だけ他の国々と違って、 β_t の

変動性がより大きいと判断される。

4.2 回帰係数の推定値の比較

α_t と β_t の 2 階差分の事前分布によるベイズ型回帰モデルに関して、7 カ国のそれぞれの回帰係数を比較してみよう。各国の α_t は図 1 (a) に、 β_t は図 1 (b) に示されている。

まず、各国の α_t の変動を分析しよう。 α_t の値から見ると、ソ連、中国、日本、フランス、英国、西ドイツとアメリカという順序となる。 α_t の変動から見ると、ソ連では、GNP と独立に増加する鋼消費量が年々増加している。中国では、GNP によらない鉄鋼の消費量の変化がほとんどない。フランス、英国、西ドイツの各国では減少する傾向がみえる。日本では、70年代の初めごろから経済構造が急に変わったことがわかる。次に、各国の β_t の変動を分析すると、中国では、低いレベルから少しずつ増加している。日本では、急激に減少する傾向が見える。アメリカ、英国、西ドイツの各国では、低いレベルでの緩やかな減少、フランスでは、低いレベルでの安定の後に減少して、1977年ごろからマイナスの数字も見える。ソ連は特異な変化を示している。

以上の分析をまとめてみると、経済の発展段階からいえば、中国とソ連は発展途上にあり、その経済の発展が強く鉄鋼に依存している。日本は高度成長期から成熟段階に入り、アメリカやフランスなどの国々は高度成熟段階に入ったといえる。経済構造からいえば、ソ連は重工業を優先的に発展させたこと、アメリカやフランスなどの国々はサービス業が一段と発達したこと、日本はオイ

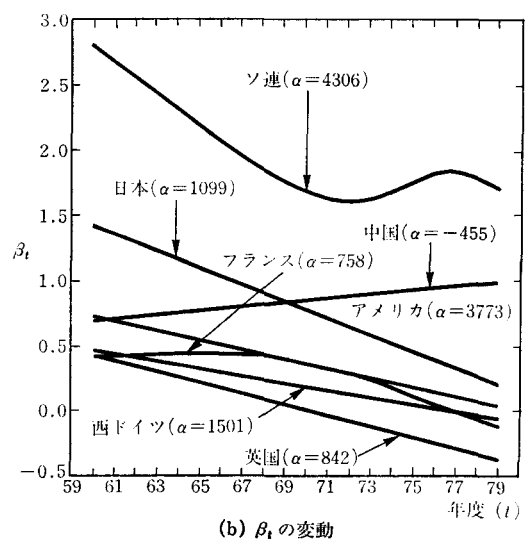
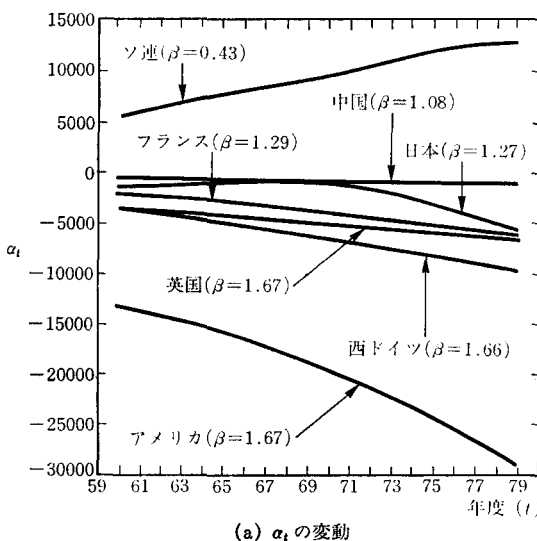
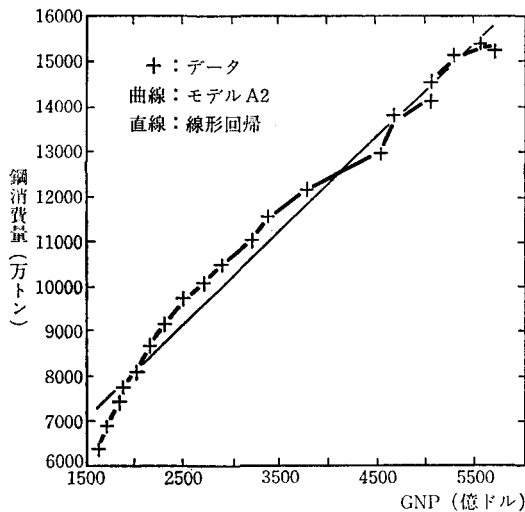
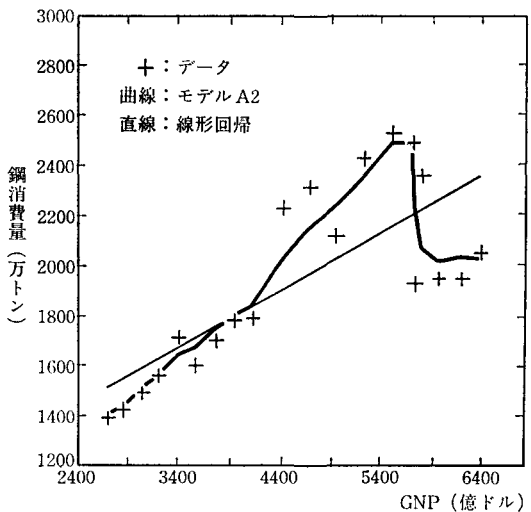


図 1 モデル A2 と B2 による α_t と β_t の変動の推定値



(a) ソ連の場合



(b) フランスの場合

図 2 モデル A2 と線形回帰による当てはめの結果

ルショックなどの原因で70年代の前半から経済構造が急に変ったことに対応している。

4.3 ベイズ型回帰モデルと線形回帰モデルの比較

ここで、同じデータにベイズ型回帰モデルと線形回帰モデルを当てはめた結果の比較を示して置く。図 2 (a) に示したのは、それぞれソ連のデータに対してベイズモデル A2 の曲線と、線形回帰モデルの比較およびオリジナルデータの散布図である。図 2 (b) では、フランスのデータに対して同じ項目を示している。図 3 の(a)と(b)では、それぞれこの 2 国のデータに対するベイズモデル B2 と線形回帰モデルを比較した。

図 2 と図 3 の結果によると、モデル A2 のデータへの当てはめが、モデル B2 のデータへの当てはめより少しよいのに対して、両方とも線形回帰モデルよりデータへの当てはめが明らかによりよいことがわかる。したがって、ベイズ型回帰モデルがより正確に動的システムの構造を反映していると考えられ、経済の発展段階にともなって、回帰係数の変化する傾向がわかれば、ベイズ型回帰モデルによって、より正確な予測も可能となることもわかる。

5. おわりに

以上、ベイズ型回帰モデルによって、鋼消費量と GNP の数量関係におけるダイナミックな構造を推定する問題について論じた。実例によって、このようなモデルが動的システムの構造分析や予測に役立つことを示

し、ABIC によるベイズ法の有用性を確かめることができた。観測データが少ないのが本稿の例の難点であるが、それでもこのような解析が可能であることはベイズ法の大きな特長といえる。さらにここで扱った考え方は、多次元のダイナミックな構造を推定する問題にも拡張できると思われる。

〔謝辞〕 経計数理研究所の田辺國士教授と北川源四郎助教授のご指導の下で完成したものであります。特に、ベイズモデルの構成と 2.3 節のパラメータの同時推定の部分に田辺教授の多くのご教示をいただきました。また、鈴木義一郎教授には日頃から暖かい励ましをいただきました。土谷隆さんには日本語の推敲にお世話になりました。ここで心よりお礼を申し上げます。

参考文献

- [1] Akaike, H. : Likelihood and the Bayes Procedure, *Bayesian Statistics*, Bernardo, J. M., DeGroot, M. H., Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (eds.), University Press, Valencia, Spain, 143-166 (1980).
- [2] Akaike, H. : Likelihood of a Model and Information Criteria, *Journal of Econometrics*, Vol. 16, 3-14 (1981).
- [3] 赤池弘次 : モデルによってデータを測る, 数理学, No. 213, 7-10 (1981).
- [4] Broemeling, L. D., Tsurumi, H. : *Econome-*

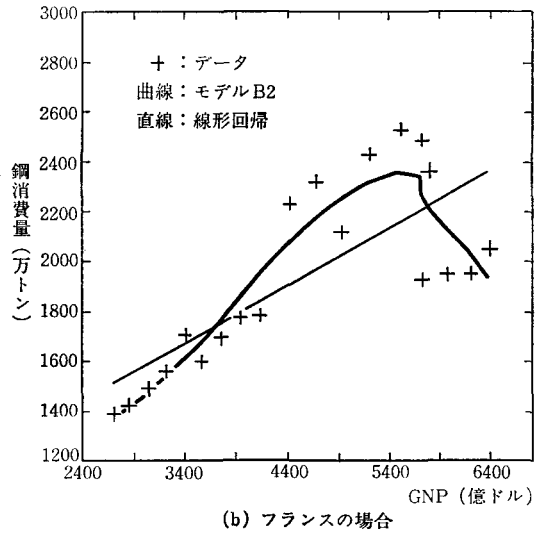
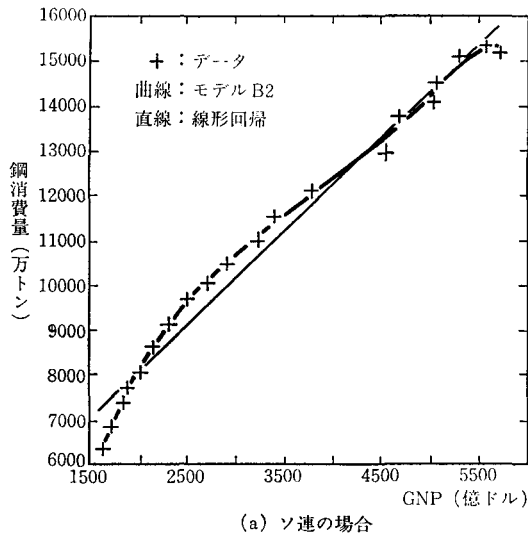


図 3 モデル B2 と線形回帰による当てはめの結果

trics and Structural Change, Marcel Dekker, New York (1986).

- [5] Dufour, J. M.: Recursive Stability Analysis of Linear Regression Relationships: An Exploratory Methodology, *Journal of Econometrics*, Vol. 19, 31-76 (1982).
- [6] 石黒真木夫: ベイズ型季節調整モデル, 数理科学, No. 213, 57-61 (1981).
- [7] 石黒真木夫, 荒畑恵美子: ベイズ型スプライン回帰, 統計数理研究所彙報, 30巻, 1号, 29-35 (1982).
- [8] 北川源四郎: 異常値観析ベイズモデル, 数理科学, No. 213, 62-66 (1981).
- [9] Kitagawa, G., Akaike, H.: A Quasi Bayesian Approach to Outlier Detection, *Ann Inst.*

Statist. Math., Vol. 34, Part B, 389-398 (1982).

- [10] 坂元慶行: カテゴリカルデータのモデル分析, 共立出版 (1985).
- [11] 田辺國士: 不適切問題への統計的アプローチ, 数理科学, No. 153, 60-64 (1976).
- [12] 田辺國士: ベイズモデルと ABIC, オペレーションズ・リサーチ, 30巻, 3号, 178-183 (1985).
- [13] 田辺國士, 田中輝雄: ベイズモデルによる曲線・曲面の当てはめ, 地球, 5巻, 3号, 179-186 (1983).
- [14] 何永綿, 姜興起: 2000年の鋼材需求研究, 中国未来研究会誌, No. 2, 36-37 (1985).
- [15] 姜興起: ベイズ法を用いた鋼消費量の動的分析モデルとその多国間の比較への応用, *Research Memorandum*, No. 395, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (1990).

会 合 記 録

| | | |
|-----------|---------|-----|
| 11月14日(木) | 研究普及委員会 | 12名 |
| 11月15日(金) | 庶務幹事会 | 7名 |
| 11月18日(月) | 理事会 | 17名 |
| 11月19日(火) | 編集委員会 | 10名 |

第 4 回理事会議題

(3-11-18)

- 1. 平成3年度第3回理事会議事録の件

- 2. 入退会承認の件
- 3. 名誉会員推薦の件
- 4. 各委員会報告
 - 秋季支部長会議終了報告の件
 - 平成4年度事業計画(案)および予算(案)編成方針の件
 - C I Mシンポジウム終了報告の件 (J I M A共催)
 - 第26回シンポジウム・秋季研究発表会終了報告
 - およびシンポジウム収支決算の件
 - 平成3年度定例講演会, セミナー開催の件
 - RAMPシンポジウム終了の件